

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES EN EL PLANO Y APLICACIONES A EDP

Trabajo de fin de grado presentado por

Natalia Molina Blanco

Tutora: Dra. Elena Blanca Medina Reus

Firma de la alumna

Firma de la tutora

Puerto Real, Cádiz, 15 de Julio de 2.021

Abstract

In this paper we go into detail about quasiconformal mappings. In addition to give the analytic definition of quasiconformal mapping, we characterize quasiconformal mappings as homeomorphism satisfying Beltrami equation, where the Beltrami coefficient is due to be bounded by a certain $k < 1$. Later, we study two examples of this kind of maps: linear map and radial stretchings. An example on quasiconformal mappings between annuli will be also include, in order to show how quasiconformal mappings generalize conformal mappings.

In the end, we show a method to solve partial differential equation based on quasiconformal map theory. In particular, we work on dKP equation.

El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa por el análisis complejo.

Jacques Hadamard

Resumen

A lo largo de este trabajo se profundizará en el estudio de las aplicaciones cuasiconformes. Además de enunciar la definición analítica de aplicación cuasiconforme se caracterizarán las transformaciones cuasiconformes como homeomorfismos que satisfacen la ecuación de Beltrami, con el coeficiente de Beltrami acotado por un cierto $k < 1$. Posteriormente se continuará con el estudio de dos ejemplos de este tipo de aplicaciones: las transformaciones lineales y los estiramientos radiales. Se incluirá también un ejemplo de transformación cuasiconforme entre coronas circulares que pondrá de manifiesto como las transformaciones cuasiconformes generalizan las transformaciones conformes.

Para finalizar este trabajo, se mostrará un método para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales basado en la teoría desarrollada sobre las aplicaciones cuasiconformes, en concreto se trabajará con las ecuaciones dKP.

Índice general

1	Introducción	1
2	Preliminares	3
2.1	Derivadas de una función compleja	3
2.1.1	Relación entre derivada direccional y derivadas parciales	5
2.1.2	Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares	6
2.1.3	Regla de la cadena para ∂ y $\bar{\partial}$	8
2.1.4	Transformaciones que conservan la orientación	11
2.2	Espacios de Sóbolev	13
3	Introducción a las aplicaciones cuasiconformes	15
3.1	Definición analítica de transformación cuasiconforme	15
3.1.1	Relación entre las aplicaciones conformes y las K -cuasiconformes	17
3.1.2	Ecuación de Beltrami	17
3.1.3	Propiedades de las transformaciones cuasiconformes	19
3.2	Transformaciones lineales	24
3.2.1	Transformación de una circunferencia centrada en el origen	28
3.3	Estiramientos radiales	31
3.4	Transformaciones conformes y cuasiconformes entre coronas circulares . .	37
3.4.1	Teorema de Schottky	38
3.4.2	Un ejemplo de transformación cuasiconforme entre coronas circulares	41

ÍNDICE GENERAL

4	Aplicaciones de las transformaciones cuasiconformes a la resolución de EDP	47
4.1	La jerarquía de dKP y transformaciones cuasiconformes con coeficiente de Beltrami con soporte compacto.	47
4.1.1	La ecuación dKP	51
4.2	El método de determinación de soluciones	52
4.3	Un ejemplo sencillo: solución estacionaria de la ecuación dKP	54
4.4	Nuevo ejemplo: solución de la ecuación dKP dependiente del tiempo	58
5	Conclusiones	65
	Bibliografía	67

Introducción

Las aplicaciones cuasiconformes han sido estudiadas desde 1928 cuando H. Grötzsh introdujo este concepto. Su interés surgió porque no existe una aplicación conforme que transforme un cuadrado en un rectángulo, en general, tal que lleve los vértices en los vértices. Así pues, Grötzsh buscó el concepto más cercano al de aplicación conforme que permitiera realizar esta transformación. Dando paso al inicio de la teoría de aplicaciones cuasiconformes.

El interés en estudiar las aplicaciones cuasiconformes ha continuado debido a sus aplicaciones en los sistemas dinámicos complejos. Como las aplicaciones conformes tienen condiciones tan estrictas de diferenciabilidad no permiten en muchas ocasiones “pegar” dos aplicaciones y que el resultado sea una nueva aplicación conforme. Por el contrario, las aplicaciones cuasiconformes al ser mas flexibles pueden “pegarse” juntas y formar nuevas aplicaciones cuasiconformes.

En este trabajo comenzamos con un capítulo donde aportamos resultados básicos (pero necesarios) para trabajar con las aplicaciones cuasiconformes. La mayor parte de este capítulo la dedicamos a teoría de las derivadas de una función compleja. Veremos la relación entre la derivada direccional y las derivadas parciales, la regla de la cadena para las derivadas con respecto a z y \bar{z} y transformaremos las ecuaciones de Cauchy-Riemann usuales en coordenadas polares. También veremos qué condición deben de cumplir las funciones de variable compleja para definir transformaciones que conserven el sentido. Para finalizar el capítulo introduciremos los espacios de Sóbolev.

1. INTRODUCCIÓN

En el siguiente capítulo procederemos a trabajar con las aplicaciones cuasiconformes. Primero daremos una definición analítica y observaremos qué relación tiene con las aplicaciones conformes. Posteriormente, veremos una definición equivalente que hará uso de la ecuación de Beltrami. Esta ecuación fue estudiada por Gauss en 1820, mucho antes de que apareciese el concepto de cuasiconforme. No fue hasta más de 100 años después que Bers [1] demostró que los homeomorfismos que son soluciones a esta ecuación con coeficiente de Beltrami acotado por un cierto $k < 1$, son precisamente las aplicaciones cuasiconformes. Gracias a esta definición equivalente estudiaremos diversas propiedades de las aplicaciones cuasiconformes.

Más adelante trabajaremos con los ejemplos más sencillos de aplicaciones cuasiconformes, estos son las transformaciones lineales. Demostraremos que son efectivamente aplicaciones cuasiconformes y estudiaremos analíticamente cómo transforman la circunferencia unidad. Otro ejemplo con el que trabajaremos también de manera analítica son los estiramientos radiales. Demostraremos que algunos de estos estiramientos son aplicaciones cuasiconformes y veremos cómo transforma varias regiones del plano complejo.

Para finalizar el capítulo resolveremos un problema similar al que se planteó Grötzsh. Si nos limitamos a las aplicaciones conformes sólo podemos transformar una corona circular en otra corona si la relación entre los radios menor y mayor se mantiene. Esto último lo veremos enunciando y demostrando el teorema de Schottky. Sin embargo, trabajaremos con un ejemplo concreto de aplicación cuasiconforme que nos dará más libertad para transformar una corona en otra con una relación diferente. Este ejemplo se puede encontrar en [2], concretamente el ejemplo 4.13 de esta referencia.

Como fin, aplicaremos la teoría de las aplicaciones cuasiconformes a la determinación de soluciones de la ecuación Kadomtsev-Petviashvili sin dispersión. Se trata de una ecuación en derivadas parciales que se utiliza para describir el movimiento de onda no lineal. Entre otras, esta ecuación tiene diversas aplicaciones en dinámica de fluidos. En esta última sección partiremos de un par resultados de la teoría de aplicaciones cuasiconformes, gracias a los cuáles desarrollaremos un método de resolución de las ecuaciones dKP. Terminaremos el trabajo determinando dos soluciones mediante el método desarrollado al comienzo de este último capítulo. Primero determinaremos una solución que sólo depende de las variables espaciales y por último una solución que depende también del tiempo.

Preliminares

En este capítulo vamos a definir algunos conceptos y enunciar algunos resultados necesarios para trabajar con las aplicaciones cuasiconformes.

2.1 Derivadas de una función compleja

Primero de todo comenzaremos trabajando con las derivadas parciales de una función de variable compleja. Para ello tomamos un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y definimos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en Ω y diferenciable en sentido real para casi todo $z \in \Omega$. Como $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, esta función podemos interpretarla como una aplicación de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^2 , tomando $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, tenemos que:

$$f(z) = f(x + iy) \equiv f(x, y),$$

y podemos definir dos funciones reales de dos variables reales del siguiente modo:

$$u(x, y) \equiv \operatorname{Re} (f(x, y)),$$

$$v(x, y) \equiv \operatorname{Im} (f(x, y)),$$

en otras palabras, una función de variable compleja es equivalente a una función vectorial real de dos variables.

Esta aplicación podemos verla como hasta ahora, esto es, que depende de (x, y) o podemos realizar un cambio de variables y trabajar con ella como función de (z, \bar{z}) . Para

2. PRELIMINARES

definir el cambio de variables simplemente se necesita hacer uso de las siguientes igualdades: $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$. Las relaciones inversas serán las siguientes: $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ y $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Como queremos trabajar indistintamente con una expresión o con otra vamos a calcular las derivadas parciales haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \quad (2.2)$$

Procedemos ahora a invertir esta relación y obtenemos las derivadas parciales de z, \bar{z} :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (2.4)$$

Nota 1. A partir de ahora haremos uso de la siguiente notación

$$\partial f(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) \quad \text{y} \quad \bar{\partial} f(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z).$$

Observar que trataremos en general con funciones que dependen tanto de z como de \bar{z} pero dado que \bar{z} es función de z indicaremos únicamente la dependencia de z , a no ser que resulte necesario indicar la dependencia con \bar{z} .

Más adelante necesitaremos trabajar con el operador de Laplace, para ello asumimos que f es \mathcal{C}^2 como función en \mathbb{R}^2 . Tiene sentido hablar de este operador porque como ya hemos visto, la aplicación f puede verse como una función vectorial real de dos variables. Su definición es la siguiente:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

- Si desarrollamos el primer término haciendo uso de (2.1) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right).$$

Volvemos a hacer uso de la ecuación (2.1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right).$$

2.1 Derivadas de una función compleja

Ahora desarrollamos los paréntesis y observamos que al suponer que la aplicación f es diferenciable en el sentido real tenemos que sus derivadas cruzadas son iguales, dicho de otro modo, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}$ y por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}.$$

Teniendo en cuenta la notación dada en la nota 1 podemos concluir que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial \partial f + \bar{\partial} \bar{\partial} f + 2 \partial \bar{\partial} f. \quad (2.5)$$

- Procedemos ahora a desarrollar la expresión de la segunda derivada con respecto a y siguiendo los mismo pasos. En este caso haremos uso de (2.2) y tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right).$$

Aplicamos de nuevo (2.2) y tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = i \frac{\partial}{\partial z} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right).$$

Desarrollamos los paréntesis:

$$i \frac{\partial}{\partial z} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}.$$

En definitiva, tenemos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\partial \partial f - \bar{\partial} \bar{\partial} f + 2 \partial \bar{\partial} f. \quad (2.6)$$

Volviendo a la expresión del operador de Laplace, si sumamos (2.5) y (2.6) concluimos que:

$$\Delta f(x, y) = 4 \partial \bar{\partial} f. \quad (2.7)$$

2.1.1 Relación entre derivada direccional y derivadas parciales

En este apartado definiremos el concepto de derivada direccional y buscaremos una relación entre esta derivada y las derivadas parciales vistas anteriormente:

Definición 2.1. Sea la función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable en el sentido real en $z \in \mathbb{C}$. Definimos la *derivada direccional* de f en dicho punto z del siguiente modo:

$$\partial_\theta f(z) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(z + te^{i\theta}) - f(z)}{t}, \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi).$$

2. PRELIMINARES

Para ver la relación con las derivadas parciales tomamos $z_0 \in \Omega$ tal que f es diferenciable en dicho punto el sentido real y por tanto para un z cercano a z_0 podemos escribir la siguiente igualdad:

$$f(z) = f(z_0) + \partial f(z_0)(z - z_0) + \bar{\partial} f(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + E(z)|z - z_0|, \quad (2.8)$$

donde $E(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow z_0$. Ahora tomamos $z = z_0 + te^{i\theta}$, con $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Podemos en la definición de derivada direccional sustituir la ecuación (2.8) teniendo en cuenta que $z - z_0 = te^{i\theta}$ y $\bar{z} - \bar{z}_0 = te^{-i\theta}$

$$\partial_\theta f(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(z_0) + \partial f(z_0)(te^{i\theta}) + \bar{\partial} f(z_0)(te^{-i\theta}) + E(z)|z - z_0| - f(z_0)}{t}.$$

Si restamos y separamos los sumandos tenemos

$$\partial f(z_0)e^{i\theta} + \bar{\partial} f(z_0)e^{-i\theta} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E(z)|z - z_0|}{t}.$$

En este punto observamos que $|z - z_0| = |te^{i\theta}| = t$, por tanto, que $t \rightarrow 0^+$ es equivalente a que $z \rightarrow z_0$ y podemos reescribir el último límite del siguiente modo:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E(z)|z - z_0|}{t} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{E(z)t}{t} = \lim_{z \rightarrow z_0} E(z) = 0.$$

La última igualdad se tiene porque f es diferenciable en el sentido real. Recapitulando, podemos concluir que:

$$\partial_\theta f(z_0) = \partial f(z_0)e^{i\theta} + \bar{\partial} f(z_0)e^{-i\theta}. \quad (2.9)$$

2.1.2 Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

En el análisis complejo hemos visto que una función compleja es diferenciable en el sentido de \mathbb{C} , o lo que es lo mismo, holomorfa, si y solo si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Nosotros, en general, no vamos a trabajar con aplicaciones holomorfas porque las aplicaciones quasiconformes no lo son. Sin embargo, puntualmente será necesario trabajar con ellas y necesitaremos hacer uso de la expresión en coordenadas polares de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Antes de definir el cambio de variables necesario para obtener la expresión deseada recordamos las condiciones de Cauchy-Riemann y lo que implican:

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y). \quad (2.10)$$

2.1 Derivadas de una función compleja

Si calculamos la derivada parcial respecto a \bar{z} haciendo uso de (2.3) tenemos:

$$\bar{\partial}f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x) + \frac{i}{2}(u_y + iv_y).$$

Si agrupamos parte real y parte imaginaria, continuamos:

$$\bar{\partial}f = \frac{1}{2}(u_x + iv_x) + \frac{i}{2}(u_y + iv_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x).$$

Teniendo en cuenta (2.10) es evidente que la expresión anterior se anula.

Nota 2. Si una función es holomorfa, como verifica las condiciones de Cauchy-Riemann tenemos que $\bar{\partial}f = 0$ y por tanto podemos identificar $f'(z) = \partial f(z)$.

Ahora, vamos a tomar $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que es holomorfa en el punto $z \in \Omega$. Para poder obtener una expresión en coordenadas polares de las condiciones de Cauchy-Riemann definimos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} h : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (r, \theta) &\longmapsto (re^{i\theta}, re^{-i\theta}) \end{aligned}$$

De manera que $(z, \bar{z}) = h(r, \theta)$. Para calcular las derivadas parciales de f hacemos uso de la regla de la cadena, teniendo en cuenta que h^1 denota la primera componente de la imagen de h y h^2 la segunda componente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f \circ h}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial z}(h(r, \theta)) \left(\frac{\partial h^1(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(h(r, \theta)) \left(\frac{\partial h^2(r, \theta)}{\partial r} \right) = \\ &= e^{i\theta} \frac{\partial f}{\partial z} + e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f \circ h}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial z}(h(r, \theta)) \left(\frac{\partial h^1(r, \theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(h(r, \theta)) \left(\frac{\partial h^2(r, \theta)}{\partial \theta} \right) = \\ &= ire^{i\theta} \frac{\partial f}{\partial z} - ire^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Si despejamos de estas expresiones las derivadas con respecto a z y a \bar{z} obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{e^{-i\theta}}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\theta}}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (2.12)$$

2. PRELIMINARES

Como hemos supuesto que f es holomorfa en z tenemos, por lo observado en la nota 2, que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Y si sustituimos esta igualdad en la expresión (2.11) concluimos que las condiciones de Cauchy-Riemann pueden expresarse como

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (2.13)$$

y por tanto se tiene que

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{i}{r} e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (2.14)$$

En definitiva, hemos conseguido nuestro objetivo, hemos obtenido una expresión en polares para las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

2.1.3 Regla de la cadena para ∂ y $\bar{\partial}$

En este apartado vamos a demostrar un lema que podemos encontrar en [3] y que nos será necesario posteriormente para demostrar ciertas propiedades de las aplicaciones cuasiconformes.

Lema 2.1. *Sea f una aplicación diferenciable en el sentido real en z_0 y sea la aplicación g diferenciable en el sentido real en $w_0 = f(z_0)$. Tenemos por tanto que tanto f como $g \circ f$ son diferenciables en el sentido real en z_0 . Además las siguientes igualdades son ciertas en z_0 :*

- (a) $\partial \bar{f} = \overline{\partial f}$ y $\bar{\partial} \bar{f} = \overline{\partial f}$.
- (b) $\bar{\partial} (g \circ f) = [(\partial g) \circ f] \bar{\partial} f + [(\bar{\partial} g) \circ f] \bar{\partial} \bar{f}$.
- (c) $\partial (g \circ f) = [(\partial g) \circ f] \partial f + [(\bar{\partial} g) \circ f] \partial \bar{f}$,

donde denotamos por \bar{f} la función definida como $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$.

Demostración. (a) Como f es diferenciable en el sentido real en z_0 podemos escribir f del siguiente modo:

$$f(z) = f(z_0) + \partial f(z_0)(z - z_0) + \bar{\partial} f(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(z - z_0), \quad z \rightarrow z_0.$$

Observamos que $\overline{o(z - z_0)} = o(\bar{z} - \bar{z}_0)$ y si calculamos el conjugado de la expresión anterior tenemos que:

$$\bar{f}(z) = \bar{f}(z_0) + \overline{\partial f(z_0)}(\bar{z} - \bar{z}_0) + \overline{\bar{\partial} f(z_0)}(z - z_0) + o(\bar{z} - \bar{z}_0), \quad z \rightarrow z_0.$$

Esta ecuación prueba que \bar{f} es diferenciable en el sentido real. Además $\bar{\partial} \bar{f}(z) = \overline{\partial f(z)}$ y $\partial \bar{f}(z) = \overline{\bar{\partial} f(z)}$ ya que son los términos que multiplican a $(z - z_0)$ y $(\bar{z} - \bar{z}_0)$ respectivamente.

2.1 Derivadas de una función compleja

(b) Para este apartado y el siguiente observamos que al ser f y g diferenciables en el sentido real en z_0 y en $w_0 = f(z_0)$ respectivamente, se pueden escribir de la siguiente manera

$$f(z) = f(z_0) + A_1(z - z_0) + B_1(\bar{z} - \bar{z}_0) + \alpha(z), \quad (2.15)$$

$$g(w) = g(w_0) + A_2(w - w_0) + B_2(\bar{w} - \bar{w}_0) + \beta(w), \quad (2.16)$$

donde $\alpha(z) = o(z - z_0)$ y $\beta(w) = o(w - w_0)$. Para realizar la demostración definimos:

$$L_1(z) = A_1(z - z_0) + B_1(\bar{z} - \bar{z}_0), \quad (2.17)$$

$$L_2(w) = A_2(w - w_0) + B_2(\bar{w} - \bar{w}_0), \quad (2.18)$$

$$\widetilde{L}_1(z) = A_1 z + B_1 \bar{z}, \quad (2.19)$$

$$\widetilde{L}_2(w) = A_2 w + B_2 \bar{w}. \quad (2.20)$$

Observamos, antes de continuar que

$$L_1(z) = \widetilde{L}_1(z - z_0), \quad (2.21)$$

$$L_2(w) = \widetilde{L}_2(w - w_0). \quad (2.22)$$

Calculemos ahora la composición $g \circ f$, para ello hacemos uso de (2.16)

$$g(f(z)) = g(w_0) + L_2(f(z)) + \beta(f(z)).$$

Si ahora sustituimos, $f(z)$ por (2.15)

$$g(f(z)) = g(w_0) + L_2(f(z_0) + L_1(z) + \alpha(z)) + \beta(f(z)),$$

y posteriormente L_2 por (2.22), teniendo en cuenta que por hipótesis $f(z_0) = w_0$:

$$g(f(z)) = g(w_0) + \widetilde{L}_2(L_1(z) + \alpha(z)) + \beta(f(z)).$$

En este punto observamos que $\widetilde{L}_2(w_1 + w_2) = \widetilde{L}_2(w_1) + \widetilde{L}_2(w_2)$ y por tanto tenemos que :

$$g(f(z)) = g(w_0) + \widetilde{L}_2(L_1(z)) + \widetilde{L}_2(\alpha(z)) + \beta(f(z)).$$

Si ahora sustituimos L_1 por (2.21) concluimos que

$$g(f(z)) = g(w_0) + \widetilde{L}_2(\widetilde{L}_1(z - z_0)) + \widetilde{L}_2(\alpha(z)) + \beta(f(z)). \quad (2.23)$$

Desarrollamos ahora haciendo uso de (2.19) y de (2.20):

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_2(\widetilde{L}_1(z - z_0)) &= \widetilde{L}_2(A_1(z - z_0) + B_1(\bar{z} - \bar{z}_0)) \\ &= A_2[A_1(z - z_0) + B_1(\bar{z} - \bar{z}_0)] + B_2[\overline{A_1(\bar{z} - \bar{z}_0)} + \overline{B_1(z - z_0)}] \\ &= [A_2 A_1 + B_2 \overline{B_1}](z - z_0) + [A_2 B_1 + B_2 \overline{A_1}](\bar{z} - \bar{z}_0). \end{aligned}$$

2. PRELIMINARES

Si $\widetilde{L}_2(\alpha(z)) = o(z - z_0)$ y $\beta(f(z)) = o(z - z_0)$ cuando $z \rightarrow z_0$ tendríamos por (2.23) y por la expresión anterior que

$$\partial(g \circ f)(z_0) = A_2 A_1 + B_2 \overline{B}_1, \quad (2.24)$$

$$\overline{\partial}(g \circ f)(z_0) = A_2 B_1 + B_2 \overline{A}_1. \quad (2.25)$$

Estudiemos pues los límites que nos faltan por demostrar:

- Cuando $z \rightarrow z_0$ tenemos que:

$$\frac{\widetilde{L}_2(\alpha(z))}{z - z_0} = \frac{A_2 \alpha(z)}{z - z_0} + \frac{B_2 \overline{\alpha(z)}}{z - z_0} \rightarrow 0,$$

porque $\alpha = o(z - z_0)$. Por tanto, $\widetilde{L}_2(\alpha(z)) = o(z - z_0)$.

- Estudiemos ahora $\frac{\beta(f(z))}{z - z_0}$ cuando $z \rightarrow z_0$.

Si $f(z) = w_0$ tenemos que $\beta(f(z)) = \beta(w_0) = 0$ y por tanto solo vamos a necesitar considerar aquellos z que tienden a z_0 tal que $f(z) \neq w_0$. Para esos z podemos reescribir el límite que queremos calcular multiplicando y dividiendo la expresión por $f(z) - w_0$:

$$\frac{\beta(f(z))}{z - z_0} = \frac{\beta(f(z))}{f(z) - w_0} \cdot \frac{f(z) - w_0}{z - z_0}. \quad (2.26)$$

Si estudiamos esta última fracción y sustituimos $f(z)$ por (2.15) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} &= \frac{f(z_0) + A_1(z - z_0) + B_1(\overline{z} - \overline{z}_0) + \alpha(z) - w_0}{z - z_0} = \\ &= A_1 + B_1 \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} + \frac{\alpha(z)}{z - z_0}, \end{aligned}$$

y por tanto esta fracción está acotada por $|A_1| + |B_1|$ cuando $z \rightarrow z_0$. Además, como $\beta = o(w - w_0)$ si escribimos $w = f(z) \rightarrow w_0$ cuando $z \rightarrow z_0$ tenemos que

$$\frac{\beta(f(z))}{f(z) - w_0} \rightarrow 0.$$

Recapitulando, si volvemos a (2.26) como una fracción tiende a 0 y la otra está acotada podemos concluir que $\beta(f(z)) = o(z - z_0)$.

Para finalizar, por (2.15) tenemos que $A_1 = \partial f(z_0)$ y $B_1 = \overline{\partial} f(z_0)$ y por (2.16) tenemos que $A_2 = \partial g(w_0) = ((\partial g) \circ f)(z_0)$ y $B_2 = \overline{\partial} g(w_0) = ((\overline{\partial} g) \circ f)(z_0)$ si sustituimos esto en (2.24) y en (2.25) tenemos que:

$$\partial(g \circ f)(z_0) = (\partial g \circ f)(z_0) \partial f(z_0) + (\overline{\partial} g \circ f)(z_0) \overline{\partial} f(z_0), \quad (2.27)$$

$$\overline{\partial}(g \circ f)(z_0) = (\partial g \circ f)(z_0) \overline{\partial} f(z_0) + (\overline{\partial} g \circ f)(z_0) \overline{\partial} f(z_0). \quad (2.28)$$

De (2.28) tenemos automáticamente el apartado b).

(c) Si ahora hacemos uso del apartado a) en la ecuación (2.27) podemos escribir:

$$\partial(g \circ f) = [\partial g \circ f] \partial f + [\bar{\partial} g \circ f] \bar{\partial} f,$$

como queríamos demostrar. □

2.1.4 Transformaciones que conservan la orientación

Definición 2.2. Una transformación que conserva la orientación es aquella transformación que verifica que su Jacobiano es estrictamente positivo.

Vamos a ver que condiciones tenemos que tener en cuenta para saber si una aplicación compleja diferenciable en sentido real conserva la orientación o no. Con este objetivo en mente procedemos a calcular el Jacobiano de funciones complejas:

$$J(f, z) = J(f, x + iy) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x.$$

Con el objetivo de encontrar una expresión más relacionada con lo visto hasta ahora, sustituimos $f(z)$ por $u(z) + iv(z)$ en las expresiones de la derivada con respecto a z y \bar{z} (2.3) y (2.4):

$$\begin{aligned} \partial f(z) &= \frac{1}{2} (\partial_x (u(z) + iv(z)) - i \partial_y (u(z) + iv(z))) = \frac{1}{2} ((u_x + iv_x) - i(u_y + iv_y)), \\ \bar{\partial} f(z) &= \frac{1}{2} (\partial_x (u(z) + iv(z)) + i \partial_y (u(z) + iv(z))) = \frac{1}{2} ((u_x + iv_x) + i(u_y + iv_y)). \end{aligned}$$

Escribimos esto último separando parte real y parte imaginaria:

$$\begin{aligned} \partial f(z) &= \frac{1}{2} ((u_x + v_y) + i(v_x - u_y)), \\ \bar{\partial} f(z) &= \frac{1}{2} ((u_x - v_y) + i(u_y + v_x)). \end{aligned}$$

Calculamos ahora su módulo al cuadrado y obtenemos:

$$\begin{aligned} |\partial f(z)|^2 &= \frac{1}{4} ((u_x + v_y)^2 + (v_x - u_y)^2) = \frac{1}{4} (u_x^2 + v_y^2 + 2u_x v_y + v_x^2 + u_y^2 - 2u_y v_x), \\ |\bar{\partial} f(z)|^2 &= \frac{1}{4} ((u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2) = \frac{1}{4} (u_x^2 + v_y^2 - 2u_x v_y + u_y^2 + v_x^2 + 2u_y v_x). \end{aligned}$$

Si restamos estas dos expresiones obtenemos claramente la expresión del jacobiano de una función compleja que vimos al principio de este apartado:

$$J(f, z) = u_x v_y - u_y v_x = |\partial f(z)|^2 - |\bar{\partial} f(z)|^2. \quad (2.29)$$

Esta igualdad implica que una transformación en el plano complejo conservará la orientación si y solo si $|\partial f(z)| > |\bar{\partial} f(z)|$. Veamos algunos ejemplos de transformaciones:

2. PRELIMINARES

Ejemplo 2.1. Primero veamos un ejemplo de transformación que conserva la orientación. Para ello transformaremos la circunferencia unidad parametrizada por $\alpha(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi)$, esto es, recorrida en sentido antihorario, como podemos ver en la Figura 2.1a.

Tomaremos la transformación $T_1(z) = az + b\bar{z}$ con $a = 1 + 2i$, $b = 1$ es evidente que $J(T_1, z) = |\partial T_1(z)|^2 - |\bar{\partial} T_1(z)|^2 = |a|^2 - |b|^2 = 5 - 1 = 4 > 0$. Por lo visto con anterioridad es una transformación que conserva el sentido. Como podemos ver en Figura 2.1b hemos obtenido una elipse, centrada en el $(0, 0)$ y recorrida en sentido antihorario.

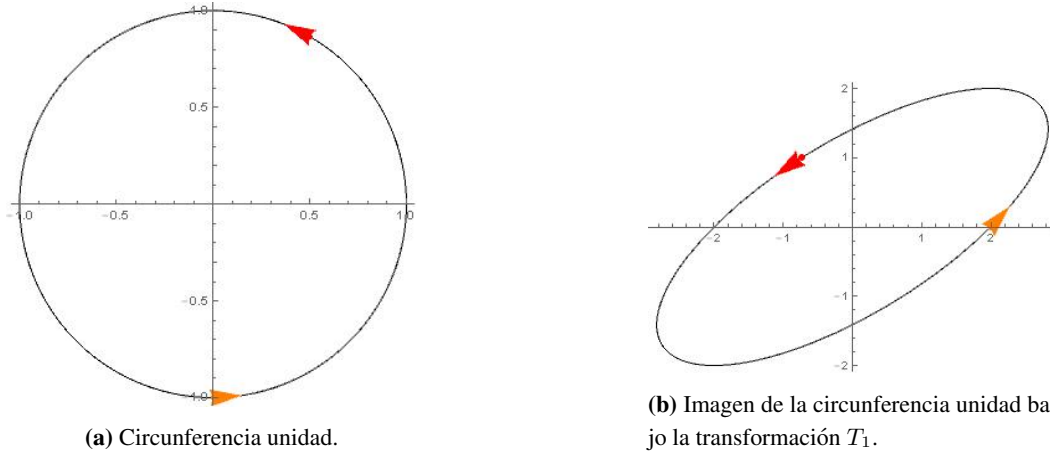


Figura 2.1: Transformación T_1

Ejemplo 2.2. Tomando la misma curva, con la misma parametrización tomamos una transformación diferente: $T_2(z) = cz + d\bar{z}$ con $c = 1$ y $d = 2i$. Esta vez $J(T_2, z) = |c|^2 - |d|^2 = 1 - 4 < 0$. Esto implica que nuestra transformación no conserva el sentido en que se recorre la curva. Podemos observar en la figura 2.2 que hemos obtenido de nuevo una elipse centrada en el origen pero esta vez recorrida en sentido horario.

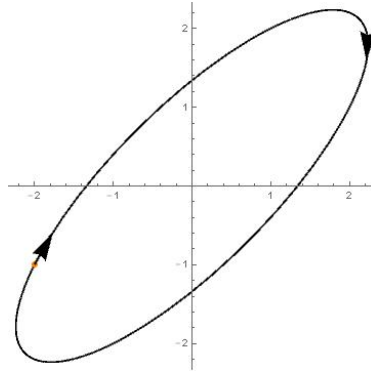


Figura 2.2: Imagen de la circunferencia unidad bajo la transformación T_2 .

2.2 Espacios de Sóbolev

Como veremos más adelante las aplicaciones cuasiconformes pertenecen a un espacio de Sóbolev, y por este motivo vamos a definir de manera formal este espacio y alguna de sus propiedades. Para ello seguiremos los apuntes [4] y el libro [5].

Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{C} . Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible en el sentido de medida de Lebesgue en \mathbb{C} . Para la integral de Lebesgue usaremos la notación $\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f(z) dx dy$.

Definición 2.3. Definimos $L^p(\Omega)$, con $p \in [1, +\infty)$ como el espacio de funciones f tal que $\int_{\Omega} |f|^p < +\infty$.

Este espacio vectorial es un espacio normado con la siguiente norma:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cuando $p = 2$ se tiene que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert para el producto

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad \text{con } f, g \in L^2(\Omega).$$

Nota 3. Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$ al espacio vectorial de las funciones reales medibles y localmente p -integrables en Ω . Este espacio no es normado pero se puede definir una noción de convergencia para sucesiones.

Definición 2.4. Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \geq 0$ y $p \in [1, +\infty)$. Un espacio de Sóbolev $W^{k,p}(\Omega)$, es un subespacio vectorial del conjunto $L^p(\Omega)$ definido del siguiente modo:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}f \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \leq k\}.$$

Del mismo modo definimos el subespacio vectorial de $L^p_{loc}(\Omega)$ como

$$W^{k,p}_{loc}(\Omega) = \{f \in L^p_{loc}(\Omega) : D^{\alpha}f \in L^p_{loc}(\Omega) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \leq k\}.$$

En la definición anterior las derivadas consideradas son derivadas en el sentido de distribuciones. Así, decir que $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$ significa que existe $v_{\alpha} \in L^p(\Omega)$ tal que $D^{\alpha}u = v_{\alpha}$ en $D'(\Omega)$, es decir, tal que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = \int_{\Omega} v_{\alpha} \varphi dx, \quad \text{para todo } \varphi \in D(\Omega),$$

2. PRELIMINARES

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$ y

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

En este caso diremos que u es derivable débil de orden α , esto es, la derivada en el sentido de las distribuciones de orden α de u es una función.

Observar que estamos llamando $D(\Omega)$ al espacio de funciones indefinidamente derivables con soporte compacto y a φ a una función test.

Observar también que cuando existe la derivada en el sentido usual esta coincide con la derivada en el sentido de distribuciones.

Definición 2.5. Definiremos la norma en $W^{k,p}(\Omega)$ como:

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De nuevo, para $p = 2$ tendremos un espacio de Hilbert con el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle_{W^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Como cuando $p = 2$ obtenemos espacios de Hilbert podemos hacer uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

Proposición 2.1. *La desigualdad de Cauchy-Schwarz para el espacio $L^2(\Omega)$*

$$\left| \int_{\Omega} fg \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega} (f)^2} \sqrt{\int_{\Omega} (g)^2}. \quad (2.30)$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz para el espacio $W^{1,2}(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} fg + \int_{\Omega} f'g' \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega} (f)^2 + \int_{\Omega} (f')^2} \sqrt{\int_{\Omega} (g)^2 + \int_{\Omega} (g')^2} \quad (2.31)$$

Introducción a las aplicaciones cuasiconformes

3.1 Definición analítica de transformación cuasiconforme

Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ abiertos y conexos.

Definición 3.1. Un homeomorfismo $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ se llama K -cuasiconforme si f pertenece a la clase de Sóbolev $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, conserva la orientación y sus derivadas direccionales satisfacen

$$\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| \leq K \min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)|, \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi), \quad (3.1)$$

para casi todo $z \in \Omega$

Antes de continuar trabajando con las aplicaciones cuasiconformes enunciaremos el siguiente teorema cuya demostración se puede ver en [6]

Teorema 3.1. *Una aplicación abierta f definida en un dominio Ω en $\overline{\mathbb{C}}$ con derivadas parciales finitas casi por doquier es diferenciable en el sentido real salvo en un conjunto de medida nula.*

Observación: Teniendo en cuenta la definición 3.1, una aplicación cuasiconforme es una aplicación abierta ya que es un homeomorfismo. Además, como las aplicaciones cuasiconformes pertenecen a la clase de Sóbolev tenemos que las derivadas parciales son localmente integrables y por tanto están acotadas casi por doquier. Haciendo uso del teorema

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

anterior podemos afirmar que las aplicaciones cuasiconformes son diferenciables en el sentido real para casi todo $z \in \Omega$.

Esta observación nos permitirá hacer uso de muchos de los resultados obtenidos en el capítulo anterior. Continuamos enunciando y demostrando una proposición que nos será útil para trabajar con la desigualdad (3.1):

Proposición 3.1.

$$\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = |\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|, \quad (3.2)$$

$$\min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = ||\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)||. \quad (3.3)$$

Demostración. Si $\partial f(z) = 0$ o $\bar{\partial} f(z) = 0$ es trivial. Por tanto, suponemos que $\partial f(z) \neq 0$ y que $\bar{\partial} f(z) \neq 0$. Para demostrar (3.2) haremos uso de la relación entre la derivada direccional y las derivadas parciales (2.14) y de la desigualdad triangular:

$$|\partial_{\theta} f(z)| = |e^{i\theta} \partial f(z) + e^{-i\theta} \bar{\partial} f(z)| \leq |\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|.$$

De este modo tenemos una cota superior, nos queda ver si esa cota se alcanza para algún $\theta \in [0, 2\pi)$. Con este fin, definimos $\alpha = \arg(\partial f(z))$ y $\beta = \arg(\bar{\partial} f(z))$ y tomamos $\theta_0 = \frac{\beta - \alpha}{2}$ entonces

$$\begin{aligned} |\partial_{\theta_0} f(z)| &= \left| e^{i\frac{\beta - \alpha}{2}} e^{i\alpha} |\partial f(z)| + e^{-i\frac{\beta - \alpha}{2}} e^{i\beta} |\bar{\partial} f(z)| \right| = \left| e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}} (|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|) \right| = \\ &= |\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|. \end{aligned}$$

Como la cota se alcanza para algún $\theta \in [0, 2\pi)$ tenemos que $\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = |\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|$.

Para demostrar la igualdad (3.3) usaremos la siguiente cota inferior que de nuevo tenemos por las propiedades del módulo:

$$|\partial_{\theta} f(z)| \geq ||\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)||.$$

Para ver si se alcanza dicha cota tomaremos $\theta_1 = \frac{\beta - \alpha - \pi}{2}$. Procediendo como antes:

$$\begin{aligned} |\partial_{\theta_1} f(z)| &= \left| e^{i\frac{\beta - \alpha - \pi}{2}} e^{i\alpha} |\partial f(z)| + e^{-i\frac{\beta - \alpha - \pi}{2}} e^{i\beta} |\bar{\partial} f(z)| \right| = \\ &= \left| e^{i\frac{\alpha + \beta - \pi}{2}} (|\partial f(z)| + e^{i\pi} |\bar{\partial} f(z)|) \right| = ||\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)||. \end{aligned}$$

En definitiva, podemos concluir que $\min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = ||\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)||$.

□

3.1.1 Relación entre las aplicaciones conformes y las K –cuasiconformes

Veamos si existe alguna relación entre una aplicación conforme y una aplicación K –cuasiconforme. Para ello, tomamos $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{C}$ aplicación conforme. Por ser conforme, existe $f'(z)$ y además $f'(z) \neq 0$ para casi todo $z \in \Omega$. El hecho de que la derivada exista implica que todas sus derivadas direccionales son iguales. Esto es:

$$\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = \min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)|, \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi).$$

Podemos por tanto afirmar que una aplicación conforme es en particular 1-cuasiconforme porque verifica las desigualdad de la definición 3.1 con $K = 1$.

Tomemos ahora una transformación 1–cuasiconforme. Haciendo uso de la definición 3.1 sustituyendo $K = 1$ obtenemos: $\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| \leq \min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)|$, con $\theta \in [0, 2\pi)$. La única posibilidad para que esto se verifique es que el máximo y el mínimo sean el mismo para cualquier θ y por la proposición 3.1 tenemos que

$$\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = |\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)| = ||\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|| = \min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)|.$$

Por tanto $|\bar{\partial} f(z)| = 0$, que es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, (por la nota 2). En definitiva, existe $f'(z)$ para casi todo $z \in \Omega$. Por otro lado, dado que las aplicaciones cuasiconformes conservan el sentido tenemos que $|\partial f(z)| > |\bar{\partial} f(z)|$ y, de nuevo, por la proposición 3.1 $\min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = |\partial f(z)| = |f'(z)| > 0$. Esto es, $f'(z) \neq 0$ y podemos concluir que una aplicación 1–cuasiconforme es conforme.

3.1.2 Ecuación de Beltrami

Haciendo uso de la proposición 3.1 podemos reescribir la definición de aplicación K –cuasiconforme del siguiente modo:

$$|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)| \leq K (|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|), \quad \text{para casi todo } z \in \Omega.$$

Trabajamos con esta desigualdad, sacamos factor común las derivadas parciales y obtenemos:

$$|\bar{\partial} f(z)| \leq \frac{K-1}{K+1} |\partial f(z)|, \quad \text{para casi todo } z \in \Omega,$$

teniendo en cuenta esta desigualdad podemos afirmar que existe una función $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ acotada para casi todo $z \in \Omega$ tal que

$$\bar{\partial} f(z) = \mu(z) \partial f(z). \tag{3.4}$$

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

La cota de dicha función μ es la siguiente:

$$\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1} < 1. \quad (3.5)$$

Definición 3.2. Llamaremos *ecuación de Beltrami* a la ecuación (3.4). Y, a su vez, llamaremos *coeficiente de Beltrami* o *coeficiente de dilatación* a la función compleja μ .

Recíprocamente, tomamos un homeomorfismo f en Ω tal que $f \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ y que conserva la orientación. Supongamos que verifica la ecuación de Beltrami, esto es, existe una función medible $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y acotada por (3.5) casi por doquier tal que verifica la ecuación (3.4). Volvemos a la expresión del máximo que nos proporciona la proposición 3.1:

$$\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = |\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|.$$

Si sustituimos la parcial respecto a \bar{z} por la ecuación de Beltrami (3.4) tenemos:

$$|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)| = |\partial f(z)| + |\mu(z)| |\partial f(z)| = |\partial f(z)| (1 + |\mu(z)|).$$

Como hemos supuesto que está acotada casi por doquier podemos concluir que:

$$\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = |\partial f(z)| (1 + |\mu(z)|) \leq |\partial f(z)| (1 + \|\mu\|_\infty). \quad (3.6)$$

Procedemos del mismo modo con el mínimo:

$$\min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = |\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)| = |\partial f(z)| - |\mu(z)| |\partial f(z)| = |\partial f(z)| (1 - |\mu(z)|).$$

Como ahora tenemos el signo contrario obtenemos la desigualdad contraria:

$$\min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| = |\partial f(z)| (1 - |\mu(z)|) \geq |\partial f(z)| (1 - \|\mu\|_\infty). \quad (3.7)$$

Si despejamos $|\partial f(z)|$ de (3.6) y de (3.7) obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)|}{1 + \|\mu\|_\infty} \leq |\partial f(z)| \leq \frac{\min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)|}{1 - \|\mu\|_\infty}.$$

Despejamos el máx de la desigualdad anterior y concluimos que

$$\max_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)| \leq \frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty} \min_{\theta} |\partial_{\theta} f(z)|. \quad (3.8)$$

Hemos demostrado que f es una función K -cuasiconforme con

$$K = \frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty}, \quad (3.9)$$

3.1 Definición analítica de transformación cuasiconforme

que llamaremos *dilatación*.

Si invertimos la relación anterior obtenemos la cota de μ :

$$\|\mu\|_{\infty} = \frac{K - 1}{K + 1} < 1. \quad (3.10)$$

En definitiva, en este apartado hemos demostrado una definición equivalente para las aplicaciones cuasiconformes:

Definición 3.3. Un homeomorfismo $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ se llama cuasiconforme si f pertenece a la clase de Sóbolev $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, conserva la orientación y existe una aplicación medible $\mu : \Omega \longrightarrow \Omega'$ tal que $\|\mu\|_{\infty} \leq k < 1$ y f satisface la ecuación de Beltrami, (3.4).

La definición 3.3 es utilizada principalmente en [2],[7] y [8]. En este último incluso se afirma: “*Estudiar las aplicaciones cuasiconformes a través de la ecuación de Beltrami es una idea particularmente valiosa porque desde este punto de vista la aplicación es la solución de una ecuación elíptica y tiene varias propiedades buenas que no son obvias en la definición*”. También, en [9], se afirma que la ecuación de Beltrami hace evidente la relación entre la teoría de aplicaciones cuasiconformes y las ecuaciones en derivadas parciales.

Tomamos f aplicación conforme en Ω por la nota 2 tenemos que $\bar{\partial}f(z) = 0$ y como es conforme tenemos que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, por (3.4) tenemos que $\mu(z) = 0$.

Estudiamos ahora el recíproco, sea $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ cuasiconforme, solución de la ecuación de Beltrami para $\mu \equiv 0$. Al ser f cuasiconforme es un homeomorfismo, además es real diferenciable, y al ser $\mu \equiv 0$ se tiene que $\bar{\partial}f \equiv 0$ en Ω luego se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. Finalmente al ser f cuasiconforme también tenemos que conserva la orientación y por tanto $\partial f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$. De esta forma tenemos que f es conforme en Ω .

En definitiva, podemos concluir que f cuasiconforme es conforme si y solo si $\mu = 0$.

3.1.3 Propiedades de las transformaciones cuasiconformes

En este apartado vamos a enunciar y demostrar un lema que podemos encontrar en [3]. Este lema nos proporcionará varias propiedades de las transformaciones cuasiconformes respecto a la operación de composición, así como propiedades de los coeficientes de Beltrami.

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

Lema 3.1 (Regla de la cadena para el coeficiente de dilatación). *Tenemos lo siguiente:*

(a) Sea μ_f y μ_h coeficientes de dilatación de las funciones $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ y $h : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ las cuáles son diferenciables en el sentido real en z y $f(z)$, respectivamente. Tales que $\partial f(z)$, $\partial h(f(z))$ y $\partial(h \circ f)(z)$ son todas no nulas. Entonces:

(i) Cuando $\bar{\partial}f(z) \neq 0$ se tiene que:

$$\mu_{h \circ f}(z) = \frac{\mu_f(z) + \mu_h(f(z)) \cdot \frac{\bar{\partial}f(z)}{\partial f(z)}}{1 + \mu_h(f(z)) \cdot \mu_f(z) \cdot \frac{\bar{\partial}f(z)}{\partial f(z)}}.$$

(ii) Cuando $\bar{\partial}f(z) = 0$ se tiene que:

$$\mu_{h \circ f}(z) = \mu_h \circ f(z) \cdot \frac{\bar{\partial}f(z)}{\partial f(z)}.$$

(b) Sea μ_f el coeficiente de Beltrami del homeomorfismo $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ diferenciable en el sentido real en z tal que $\partial f(z)$ no se anula y además, $|\partial f(z)| \neq |\bar{\partial}f(z)|$. Luego, suponemos que f^{-1} es diferenciable en el sentido real en $f(z)$, tenemos entonces que:

$$\mu_{f^{-1}}(f(z)) = -\mu_f(z) \cdot \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial}f(z)}.$$

(c) Sean μ_f y μ_h los coeficientes de dilatación de los homeomorfismos $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ y $h : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ tales que son diferenciables en el sentido real en z tales que $\partial f(z)$, $\partial h(z)$ y $\partial(h \circ f^{-1})(f(z))$ son todos no nulos y $|\partial f(z)| \neq |\bar{\partial}f(z)|$. Entonces, si f^{-1} es diferenciable en el sentido real en $f(z)$ tenemos que:

$$\mu_{h \circ f^{-1}}(f(z)) = \frac{\mu_h(z) - \mu_f(z)}{1 - \mu_h(z) \cdot \bar{\mu}_f(z)} \cdot \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial}f(z)}.$$

Antes de comenzar con la demostración vamos a hacer una pequeña observación. Si tenemos f, h aplicaciones cuasiconformes cuyos coeficientes de Beltrami coinciden en un abierto por el último apartado de este lema tenemos que $h \circ f^{-1}$ es una aplicación conforme. Ya que el coeficiente de dilatación de la composición se anularía.

Demostración. a) i) Aplicamos el Lema 2.1 apartados b y c y tenemos lo siguiente

$$\mu_{h \circ f} = \frac{\bar{\partial}(h \circ f)}{\partial(h \circ f)} = \frac{[(\partial h) \circ f] \bar{\partial}f + [(\bar{\partial}h) \circ f] \bar{\partial}f}{[(\partial h) \circ f] \partial f + [(\bar{\partial}h) \circ f] \bar{\partial}f}.$$

3.1 Definición analítica de transformación cuasiconforme

Si ahora multiplicamos y dividimos por el cociente: $\frac{1}{\partial f [(\partial h) \circ f]}$ tenemos que:

$$\frac{[(\partial h) \circ f] \bar{\partial} f + [(\bar{\partial} h) \circ f] \bar{\partial} \bar{f}}{[(\partial h) \circ f] \partial f + [(\bar{\partial} h) \circ f] \bar{\partial} \bar{f}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial f [(\partial h) \circ f]}{1}} = \frac{\frac{\bar{\partial} f}{\partial f} + \frac{[(\bar{\partial} h) \circ f] \bar{\partial} \bar{f}}{\partial f [(\partial h) \circ f]}}{1 + \frac{[(\bar{\partial} h) \circ f] \bar{\partial} \bar{f}}{\partial f [(\partial h) \circ f]}}.$$

Sustituimos en la expresión anterior lo siguiente $\frac{\bar{\partial} h}{\partial h} = \mu_h$, $\frac{\bar{\partial} f}{\partial f} = \mu_f$ y haciendo de nuevo uso del Lema 2.1 esta vez del apartado a tenemos que $\partial \bar{f} = \bar{\partial} f$:

$$\frac{\frac{\bar{\partial} f}{\partial f} + \frac{[(\bar{\partial} h) \circ f] \bar{\partial} \bar{f}}{\partial f [(\partial h) \circ f]}}{1 + \frac{[(\bar{\partial} h) \circ f] \bar{\partial} \bar{f}}{\partial f [(\partial h) \circ f]}} = \frac{\mu_f + \mu_h \circ f \cdot \frac{\bar{\partial} f}{\partial f}}{1 + \mu_h \circ f \cdot \frac{\bar{\partial} f}{\partial f}}.$$

Si ahora multiplicamos y dividimos por $\bar{\partial} f$, (por hipótesis $\bar{\partial} \neq 0$) en el cociente que tenemos en el denominador podemos concluir con la demostración:

$$\mu_{h \circ f} = \frac{\mu_f + \mu_h \circ f \cdot \frac{\bar{\partial} f}{\partial f}}{1 + \mu_h \circ f \cdot \frac{\bar{\partial} f}{\partial f} \cdot \frac{\bar{\partial} \bar{f}}{\bar{\partial} f}} = \frac{\mu_f + \mu_h \circ f \cdot \frac{\bar{\partial} f}{\partial f}}{1 + \mu_h \circ f \cdot \mu_f \cdot \frac{\bar{\partial} f}{\partial f}}.$$

ii) Suponemos que $\bar{\partial} f = 0$, por tanto, $\bar{\partial} \bar{f} = 0$ y por el apartado a del Lema 2.1 tenemos que $\partial \bar{f} = 0$. Por tanto, si aplicamos los apartados b y c como en el caso anterior, obtenemos lo siguiente:

$$\mu_{h \circ f} = \frac{\bar{\partial} (h \circ f)}{\partial (h \circ f)} = \frac{[(\bar{\partial} h) \circ f] \bar{\partial} \bar{f}}{[(\partial h) \circ f] \partial f}.$$

De aquí tenemos directamente la expresión buscada:

$$\mu_{h \circ f} = \mu_h \circ f \cdot \frac{\bar{\partial} f}{\partial f}.$$

b) Para demostrar este apartado vamos a considerar la función analítica $f \circ f^{-1}(z) = z$. Por los apartados b y c del Lema 2.1 obtenemos en $f(z)$:

$$1 = \partial (f \circ f^{-1}) = (\partial f \circ f^{-1}) (\partial f^{-1}) + (\bar{\partial} f \circ f^{-1}) (\bar{\partial} f^{-1}), \quad (3.11)$$

$$0 = \bar{\partial} (f \circ f^{-1}) = (\partial f \circ f^{-1}) (\bar{\partial} f^{-1}) + (\bar{\partial} f \circ f^{-1}) (\bar{\partial} f^{-1}). \quad (3.12)$$

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

Para simplificar los cálculos posteriores definimos :

$$A = \partial f \circ f^{-1}, \quad (3.13)$$

$$B = \partial f^{-1}, \quad (3.14)$$

$$C = \bar{\partial} f \circ f^{-1}, \quad (3.15)$$

$$D = \partial \bar{f}^{-1}. \quad (3.16)$$

Luego, por el apartado a del Lema 2.1 tenemos que $\bar{B} = \bar{\partial} \bar{f}^{-1}$ y que $\bar{D} = \bar{\partial} f^{-1}$ y si sustituimos las expresiones (3.13), (3.14), (3.15) y (3.16) en (3.11) y (3.12) tendremos que

$$1 = AB + CD \quad (3.17)$$

$$0 = A\bar{D} + C\bar{B} \quad (3.18)$$

Si usamos el conjugado de la segunda ecuación, podemos obtener una expresión para B y D en términos de A y C :

$$B = \frac{\bar{A}}{|A|^2 - |C|^2} \quad (3.19)$$

$$D = \frac{-\bar{C}}{|A|^2 - |C|^2} \quad (3.20)$$

Observar que una de nuestras hipótesis es que $|\partial f(z)| \neq |\bar{\partial} f(z)|$, y por tanto $|A| \neq |C|$. Estamos en condiciones de calcular el coeficiente de dilatación de f^{-1} :

$$\mu_{f^{-1}}(f(z)) = \frac{\bar{\partial} f^{-1}}{\partial f^{-1}} = \frac{\bar{D}}{B}$$

Ahora sustituimos por (3.19) y (3.20) y posteriormente multiplicamos y dividimos por A :

$$\frac{\bar{D}}{B} = \frac{\frac{-\bar{C}}{|A|^2 - |C|^2}}{\frac{\bar{A}}{|A|^2 - |C|^2}} = -\frac{C}{A} = -\frac{C}{A} \frac{A}{A}.$$

Como la diferencial es una aplicación lineal tenemos las dos siguiente igualdades:

$$\frac{C}{A} = \frac{\bar{\partial} f \circ f^{-1}}{\partial f \circ f^{-1}} = \frac{\bar{\partial} f f^{-1}}{\partial f f^{-1}} = \frac{\bar{\partial} f}{\partial f} = \mu_f$$

$$\frac{A}{\bar{A}} = \frac{\partial f \circ f^{-1}}{\bar{\partial} f \circ f^{-1}} = \frac{\partial f f^{-1}}{\bar{\partial} f f^{-1}} = \frac{\partial f}{\bar{\partial} f},$$

sustituyendo podemos concluir la demostración:

$$\mu_{f^{-1}}(f(z)) = -\frac{C}{A} \frac{A}{\bar{A}} = -\mu_f(z) \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial} f(z)}.$$

3.1 Definición analítica de transformación cuasiconforme

c) Para demostrar este apartado haremos uso de los apartados anteriores, a y b de este mismo lema.

Primero suponemos que $\bar{\partial}f(z) \neq 0$ y por tanto, $C \neq 0$ y $D \neq 0$. Aplicamos el apartado a sustituyendo $f(z)$ por $f^{-1}(f(z))$:

$$\mu_{h \circ f^{-1}}(f(z)) = \frac{\mu_{f^{-1}}(f(z)) + \mu_h \circ f^{-1}(f(z)) \cdot \frac{\bar{\partial}f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))}}{1 + \mu_h \circ f^{-1}(f(z)) \cdot \mu_{f^{-1}}(f(z)) \cdot \frac{\bar{\partial}f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))}}.$$

Haciendo uso del apartado b y de que $f^{-1}(f(z)) = z$ podemos continuar escribiendo:

$$\frac{\mu_{f^{-1}}(f(z)) + \mu_h \circ f^{-1}(f(z)) \cdot \frac{\bar{\partial}f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))}}{1 + \mu_h \circ f^{-1}(f(z)) \cdot \mu_{f^{-1}}(f(z)) \cdot \frac{\bar{\partial}f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))}} = \frac{-\mu_f(z) \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial}f(z)} + \mu_h(z) \frac{\bar{\partial}f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))}}{1 - \mu_h(z) \mu_f(z) \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial}f(z)} \frac{\bar{\partial}f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))}}.$$

Sustituimos los cocientes por las expresiones (3.13), (3.14) y (3.16) evaluadas en $f(z)$.

$$\frac{-\mu_f(z) \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial}f(z)} + \mu_h(z) \frac{\bar{\partial}f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))}}{1 - \mu_h(z) \mu_f(z) \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial}f(z)} \frac{\bar{\partial}f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))}} = \frac{-\mu_f(z) \frac{A}{\bar{A}} + \mu_h(z) \frac{\bar{B}}{B}}{1 - \mu_h(z) \mu_f(z) \frac{A}{\bar{A}} \frac{\bar{D}}{D}}.$$

Ahora sustituimos B y D por (3.19) y (3.20) respectivamente, de modo que:

$$\frac{-\mu_f(z) \frac{A}{\bar{A}} + \mu_h(z) \frac{\bar{B}}{B}}{1 - \mu_h(z) \mu_f(z) \frac{A}{\bar{A}} \frac{\bar{D}}{D}} = \frac{(-\mu_f(z) + \mu_h(z)) \frac{A}{\bar{A}}}{1 - \mu_h(z) \mu_f(z) \frac{A}{\bar{A}} \frac{(-\bar{C})}{(-C)}}.$$

Antes de continuar vamos a realizar el siguiente producto:

$$\mu_f(z) \frac{A}{\bar{A}} \frac{(-\bar{C})}{(-C)} = \frac{\bar{\partial}f(z)}{\partial f(z)} \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial}f(z)} \frac{\bar{\partial}f(z)}{\partial f(z)} = \frac{\bar{\partial}f(z)}{\partial f(z)} = \bar{\mu}_f(z).$$

Y lo sustituimos en la expresión anterior:

$$\frac{(-\mu_f(z) + \mu_h(z)) \frac{A}{\bar{A}}}{1 - \mu_h(z) \mu_f(z) \frac{A}{\bar{A}} \frac{(-\bar{C})}{(-C)}} = \frac{(-\mu_f(z) + \mu_h(z)) \frac{A}{\bar{A}}}{1 - \mu_h(z) \bar{\mu}_f(z)}.$$

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

Para llegar a la expresión deseada solo nos queda sustituir A por (3.13):

$$\mu_{h \circ f^{-1}}(f(z)) = \frac{\mu_h(z) - \mu_f(z)}{1 - \mu_h(z) \cdot \bar{\mu}_f(z)} \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial} f(z)}.$$

En segundo lugar suponemos que $\bar{\partial} f(z) = 0$ y por tanto, $\mu_f(z) = 0$ y $\bar{\mu}_f(z) = 0$ y así la expresión deseada se obtiene de aplicar el apartado aii de este mismo lema, sustituyendo $f(z)$ por $f^{-1}(f(z))$:

$$\mu_{h \circ f^{-1}}(f(z)) = \mu_h \circ f^{-1}(f(z)) \cdot \frac{\bar{\partial} f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))}.$$

Si sustituimos por la expresión de B evaluada en $f(z)$, (3.14) y posteriormente por (3.19) igual que en la demostración anterior tenemos lo siguiente:

$$\mu_h \circ f^{-1}(f(z)) \cdot \frac{\bar{\partial} f^{-1}(f(z))}{\partial f^{-1}(f(z))} = \mu_h \circ f^{-1}(f(z)) \cdot \frac{\bar{B}}{B} = \mu_h \circ f^{-1}(f(z)) \cdot \frac{A}{\bar{A}}.$$

De este modo solo nos queda sustituir A por (3.13) y observar de nuevo que la diferencial es una aplicación lineal, de este modo concluimos que:

$$\mu_{h \circ f^{-1}}(f(z)) = \mu_h(z) \cdot \frac{\partial f(z)}{\bar{\partial} f(z)}.$$

□

3.2 Transformaciones lineales

En esta sección trabajaremos con el ejemplo más sencillo de aplicación cuasiconforme: las aplicaciones lineales.

Cualquier aplicación lineal $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ puede ser escrita, si usamos las coordenadas (z, \bar{z}) , de la siguiente manera:

$$L(z) = az + b\bar{z} \text{ con } a, b, z \in \mathbb{C}$$

Antes de trabajar con estas transformaciones, vamos estudiar bajo que condiciones para los coeficientes complejos a y b se tiene que las transformaciones L son aplicaciones cuasiconformes. Comenzamos por calcular su inversa para demostrar que es un homeomorfismo. Esto es, vamos a despejar z de

$$w = L(z). \tag{3.21}$$

Suponemos que a y b no se anulan a la vez, ya que en dicho caso tendríamos la función nula y evidentemente no tendríamos inversa. Primero, escribimos los números complejos implicados de manera extendida, esto es:

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ \bar{z} &= x - iy, \\ a &= a_1 + ia_2, \\ b &= b_1 + ib_2, \\ w &= r + is. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Volvemos a (3.21) y desarrollamos el producto:

$$w = L(z) = az + b\bar{z} = a_1x - a_2y + b_1x + b_2y + i(a_2x + a_1y + b_2x - b_1y).$$

Si ahora igualamos parte real y parte imaginaria obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} r &= a_1x - a_2y + b_1x + b_2y \\ s &= a_2x + a_1y + b_2x - b_1y \end{cases}$$

Despejamos x e y del sistema anterior y obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} x &= \frac{a_1r - b_1r + a_2s - b_2s}{a_1^2 + a_2^2 - (b_1^2 + b_2^2)} \\ y &= \frac{a_1s + b_1s - a_2r - b_2r}{a_1^2 + a_2^2 - (b_1^2 + b_2^2)} \end{cases}$$

Observamos que ambos denominadores se pueden escribir de manera más sencilla del siguiente modo: $a_1^2 + a_2^2 - (b_1^2 + b_2^2) = |a|^2 - |b|^2$. Si ahora sumamos: $z = x + iy$ agrupando los términos de a y de b tenemos:

$$z = x + iy = \frac{[a_1r + a_2s + i(a_1s - a_2r)] - [(b_1r + b_2s + i(b_2r - b_1s))]}{|a|^2 - |b|^2}.$$

Observamos que $a_1r + a_2s + i(a_1s - a_2r) = \bar{a}w$ y que $(b_1r + b_2s + i(b_2r - b_1s)) = b\bar{w}$. En definitiva, podemos concluir que

$$L^{-1}(w) = \frac{\bar{a}w - b\bar{w}}{|a|^2 - |b|^2}. \tag{3.23}$$

Esta aplicación es continua siempre que $|a| \neq |b|$, por tanto, tenemos que L es un homeomorfismo cuando $|a| \neq |b|$. A continuación, veamos el valor de sus derivadas parciales:

$$\partial L(z) = a, \quad \bar{\partial} L(z) = b.$$

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

Calculemos el valor del módulo al cuadrado de las derivadas parciales:

$$|\partial L(z)|^2 = |a|^2, \quad |\bar{\partial} L(z)|^2 = |b|^2.$$

Es evidente que las expresiones anteriores son localmente integrables y por tanto $L \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C}_{\mathbb{R}})$. Además si tomamos $|a| > |b|$ tenemos que L conserva el sentido. En este punto solo nos queda encontrar una función medible $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ acotada casi por doquier. La definimos de la siguiente manera:

$$\mu_L(z) = \frac{\bar{\partial} L(z)}{\partial L(z)} = \frac{b}{a} = \left| \frac{b}{a} \right| e^{i2\theta}, \quad (3.24)$$

donde denotamos por $\theta \in \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$ a la mitad del argumento de μ_L . Es evidente que

$$\|\mu_L\|_{\infty} = \left| \frac{b}{a} \right| < 1,$$

ya que hemos supuesto que $|b| < |a|$.

Nota 4. Observamos que L es holomorfa si y solo si $b = 0$ y esto ocurre si y solo si $\mu(L) = 0$.

Veamos a través de un par de ejemplos cómo transforma el cuadrado unidad y el círculo unidad:

Ejemplo 3.1. Tomemos $a = 1 + i$ y $b = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$. Observamos que $|a| = \sqrt{2} > 1 = |b|$. Por tanto si definimos

$$L_1(z) = az + b\bar{z} = (1 + i)z + \frac{\sqrt{3} + i}{2}\bar{z},$$

tenemos una aplicación lineal cuasiconforme. Podemos ver como transforma el cuadrado unidad en la gráfica 3.1.

Ejemplo 3.2. Tomemos $a = \frac{3}{2} + i$ y $b = -\frac{1}{8} - i$. Observamos que $|a| = \frac{\sqrt{13}}{2} > \frac{\sqrt{65}}{8} = |b|$. Por tanto si definimos

$$L_2(z) = az + b\bar{z} = \left(\frac{3}{2} + i\right)z - \left(\frac{1}{8} + i\right)\bar{z},$$

tenemos una aplicación lineal cuasiconforme. Podemos ver como transforma el círculo unidad en la gráfica 3.2.

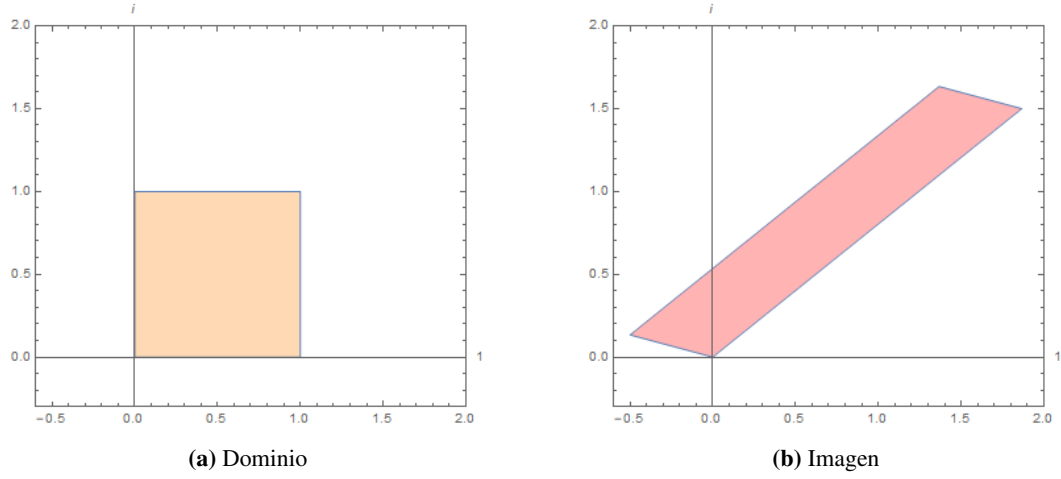


Figura 3.1: Transformación lineal L_1

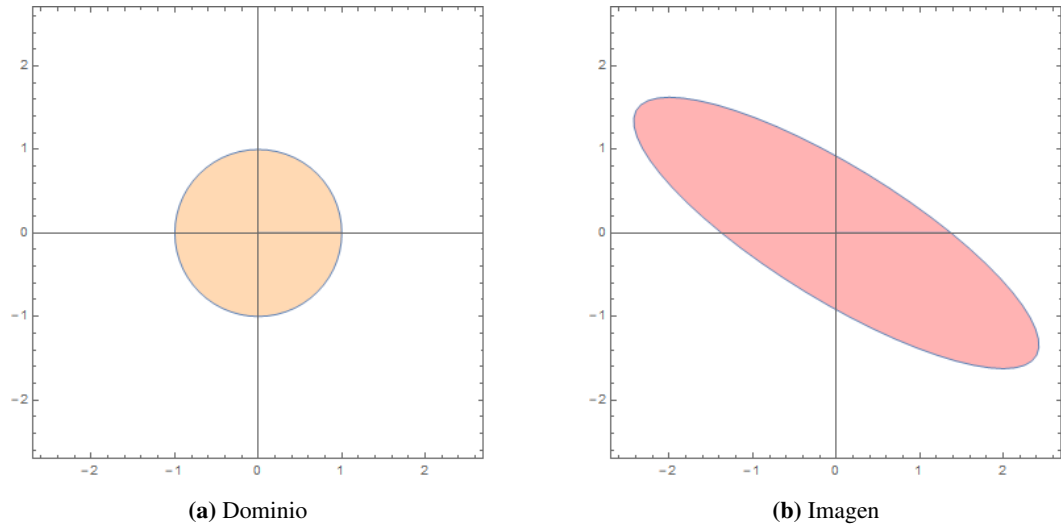


Figura 3.2: Transformación lineal L_2

Ejemplo 3.3. Vamos a ver ahora que sucede si tomamos el mismo a que en el ejemplo anterior pero tomamos b cambiado de signo, esto es $a = \frac{3}{2} + i$ y $b = \frac{1}{8} + i$. Es evidente que sus módulos son los mismos que antes y por tanto

$$L_3(z) = az + b\bar{z} = \left(\frac{3}{2} + i\right)z + \left(\frac{1}{8} + i\right)\bar{z},$$

es una aplicación lineal cuasiconforme. Podemos ver como transforma el círculo unidad en la gráfica 3.3.

Vemos que la imagen de esta transformación lineal es similar a la anterior, parece que simplemente se ha girado $\frac{\pi}{2}$.

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

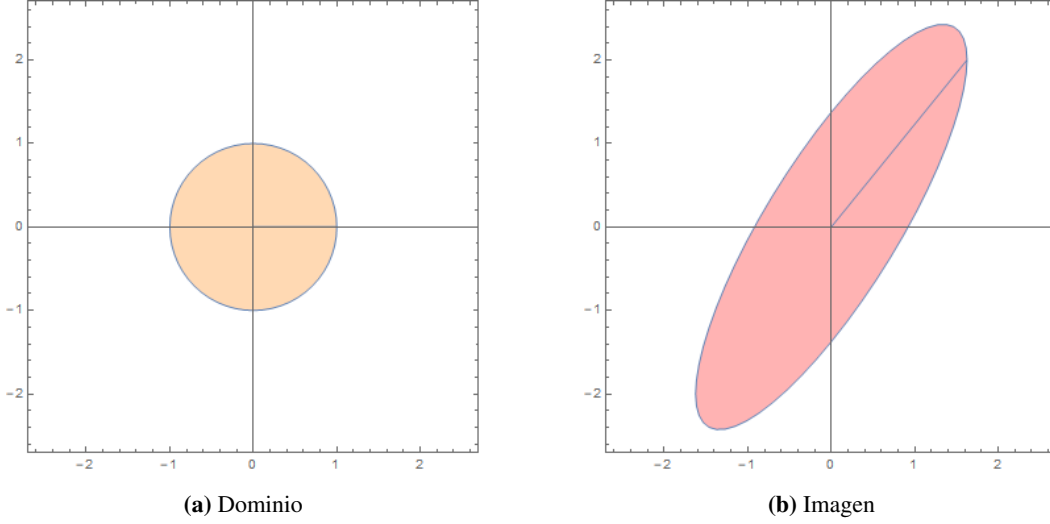


Figura 3.3: Transformación lineal L_3

3.2.1 Transformación de una circunferencia centrada en el origen

Vamos a estudiar de manera analítica como se transforma una circunferencia centrada en el origen mediante una transformación lineal cuasiconforme. Para ello vamos a fijar $a = |a|e^{i\alpha}$ donde $\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ y reescribimos L como:

$$L(z) = |a|e^{i\alpha}z + b\bar{z}.$$

Escribimos también $b = |b|e^{i\beta}$ donde de nuevo, $\beta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. De este modo, utilizando la definición de μ_L (a partir de ahora escribiremos simplemente μ para hacer más sencilla notación), tenemos por un lado que $|b| = |\mu||a|$ y por otro que $e^{i2\theta} = e^{i\beta}e^{-i\alpha}$ (3.24). Sustituyendo tenemos que:

$$|a|e^{i\alpha}z + b\bar{z} = |a|e^{i\alpha}z + |\mu||a|e^{i2\theta}e^{i\alpha}\bar{z}.$$

Para concluir sacamos factor común y escribimos L del siguiente modo:

$$L(z) = e^{i\alpha}|a| \left(z + |\mu|e^{i2\theta}\bar{z} \right).$$

De hecho, L es la composición de la aplicación lineal $S(z) = |a| (z + |\mu|e^{i2\theta}\bar{z})$ y de la rotación $R(z) = e^{i\alpha}z$. Esto es: $L(z) = (R \circ S)(z)$.

Definimos ahora $z(t) = re^{it}$ con $r \in (0, \infty)$ y $t \in [0, 2\pi)$, es evidente que $z(t) \in C(0, r)$. Reescribimos la función z sumando y restando en el exponente θ y posteriormente utilizando la definición de la exponencial compleja obtenemos:

$$z(t) = re^{i(t-\theta)}e^{i\theta} = r \cos(t-\theta)e^{i\theta} + ir \sin(t-\theta)e^{i\theta}.$$

Como $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ podemos escribir lo siguiente:

$$z(t) = r \cos(t-\theta)e^{i\theta} + r \sin(t-\theta)e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}.$$

Si ahora evaluamos S en esta función tenemos:

$$\begin{aligned} S(z(t)) &= |a| \left(r \cos(t-\theta)e^{i\theta} + r \sin(t-\theta)e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \right) + \\ &+ |a| |\mu| e^{i2\theta} \left(r \cos(t-\theta)e^{-i\theta} + r \sin(t-\theta)e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})} \right). \end{aligned}$$

Ahora, multiplicamos las exponenciales teniendo en cuenta que $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -e^{i\frac{\pi}{2}}$ y sacamos factor común \cos y \sin :

$$S(z(t)) = r|a|(1+|\mu|)\cos(t-\theta)e^{i\theta} + r|a|(1-|\mu|)\sin(t-\theta)e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}.$$

Tenemos de esta forma que $S(C(0, 1))$ es una elipse. Continuamos ahora calculando la imagen de $z(t)$ mediante L , esto es:

$$L(z(t)) = R \circ S(z(t)) = r|a|(1+|\mu|)\cos(t-\theta)e^{i(\alpha+\theta)} + r|a|(1-|\mu|)\sin(t-\theta)e^{i(\alpha+\theta+\frac{\pi}{2})}. \quad (3.25)$$

Estudiemos el módulo de $L(z(t))$, para ello sacamos factor común $e^{i(\alpha+\theta)}$ y escribimos $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$:

$$\begin{aligned} |L(z(t))| &= r|a| |(1+|\mu|)\cos(t-\theta) + i(1-|\mu|)\sin(t-\theta)| = \\ &= r|a| \sqrt{(1+|\mu|)^2 \cos^2(t-\theta) + (1-|\mu|)^2 \sin^2(t-\theta)}. \end{aligned}$$

Es evidente que el módulo no es constante, para ver cuál es el valor del máximo y del mínimo vamos a estudiar los puntos críticos. Para ello calculamos la derivada del interior de la raíz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(1+|\mu|)^2 \cos^2(t-\theta) + (1-|\mu|)^2 \sin^2(t-\theta) \right] = -4|\mu| \sin(2(t-\theta)) = 0.$$

La derivada se anula en $t = \theta$, como es positiva antes de este punto y negativa después de el tenemos que es un máximo. También se anula en $t = \theta + \frac{\pi}{2}$, siendo un mínimo porque la derivada es negativa antes de este punto y positiva después. Podemos concluir que tenemos una elipse tal que:

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

- El eje mayor tiene radio

$$|L(z(\theta))| = r|a|(1 + |\mu|),$$

y su dirección es

$$e^{\arg L(z(\theta))} = e^{i(\alpha+\theta)}.$$

- El eje menor tiene radio

$$\left| L\left(z\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right| = r|a|(1 - |\mu|),$$

y su dirección es

$$e^{\arg L(z(\theta+\frac{\pi}{2}))} = e^{i(\alpha+\theta+\frac{\pi}{2})}.$$

La forma de la elipse depende sólo de $|\mu|$, es decir, de la relación entre los módulos de $|a|$ y $|b|$, (3.24). En particular, la relación entre las longitudes de los semiejes viene dada por:

$$\frac{|r|a|(1 + |\mu|)}{|r|a|(1 - |\mu|)} = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} = K_L.$$

Esto último por la definición de dilatación en (3.9).

Ejemplo 3.4. Volvemos al ejemplo 3.1 y aplicamos estos cálculos a la aplicación lineal L_1 definida en este ejemplo. Recordemos su expresión:

$$L_1 = (1 + i)z + \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)\bar{z}.$$

En este caso, $a = |a|e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $b = |b|e^{i\beta} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ y por (3.24) tenemos que $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Por tanto, para conocer la imagen de la circunferencia unidad centrada en el origen, esto es, la imagen de la curva:

$$z(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{24}\right)e^{-i\frac{\pi}{24}} + \sin\left(t + \frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{11\pi}{24}},$$

reescribimos L_1 haciendo uso de (3.25) de manera que:

$$L_1(z(t)) = \left(\sqrt{2} + 1\right)\cos\left(t + \frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{5\pi}{24}} + \left(\sqrt{2} - 1\right)\sin\left(t + \frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{17\pi}{24}}.$$

Esta aplicación lineal transforma la circunferencia unidad en la elipse que podemos ver en la imagen 3.4.

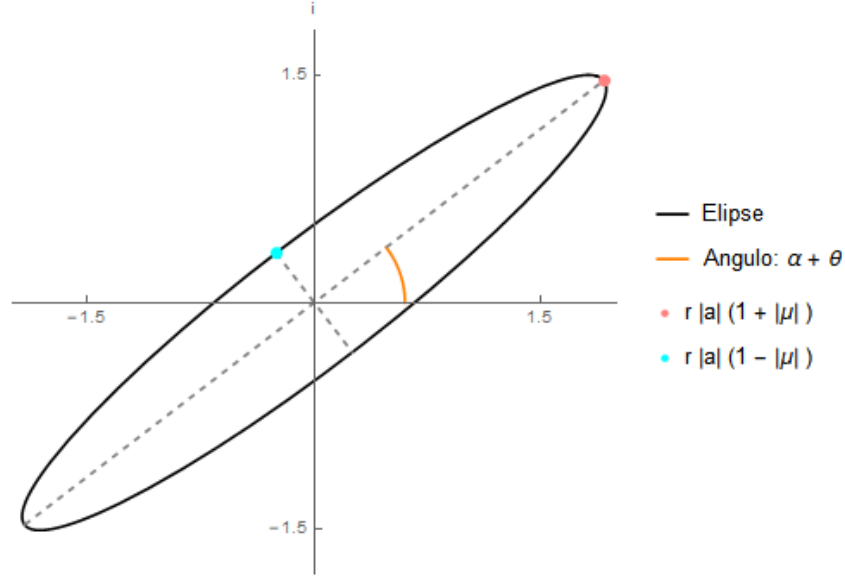


Figura 3.4: $L_1(z(t))$, con $t \in [0, 2\pi)$.

3.3 Estiramientos radiales

Sea $\rho = \rho(t)$ una función diferenciable a trozos tal que $\rho : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Asumimos que ρ es monótona estrictamente creciente.

Definición 3.4. A la función $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma

$$h(z) = \rho(|z|) e^{i \arg(z)},$$

se le denomina *estiramiento radial*.

Nota 5. Observar que si $\rho(t) = t$ entonces tenemos el caso trivial de la identidad $h(z) = |z|e^{i \arg(z)} = z$.

Además, observamos que por como está definida la función h si tenemos una circunferencia centrada en el origen, esto es, definimos $z(t) = Re^{it}$, como h mantiene el argumento y únicamente transforma el módulo, o lo que es lo mismo, $h(z(t)) = \rho(R)e^{it}$, obtenemos de nuevo una circunferencia centrada en el origen.

Algo similar ocurre con las semirrectas cuyo extremo está en el origen. En este caso, al no transformar el argumento la semirrecta permanecerá invariante. Esto es, definimos $z(t) = te^{i\alpha}$ para $t \geq 0$ y observamos que la imagen vuelve a ser la misma semirrecta: $h(z(t)) = \rho(t)e^{i\alpha}$.

Primero de todo, observamos que h es un homeomorfismo ya que ρ es estrictamente creciente y por tanto inyectiva. Veamos si pertenece al espacio de Sóbolev, para ello vamos

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

a calcular las derivadas parciales de h en puntos donde la derivada de la función ρ exista. Con ese fin procedemos a derivar la función módulo respecto a z y a \bar{z} , teniendo en cuenta la siguiente relación $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

$$\frac{\partial}{\partial z}|z| = \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{2\sqrt{z\bar{z}}} = \frac{\bar{z}}{2|z|},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|z| = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\sqrt{z\bar{z}} = \frac{z}{2\sqrt{z\bar{z}}} = \frac{z}{2|z|}.$$

Teniendo ahora en mente que $e^{i \arg z} = \frac{z}{|z|} = \frac{|z|}{\bar{z}}$ y lo calculado anteriormente obtenemos las siguientes expresiones para las derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial z}e^{i \arg z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{|z|} = \frac{|z| - z \frac{\bar{z}}{2|z|}}{|z|^2} = \frac{2|z| - |z|}{2|z|^2} = \frac{1}{2|z|},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}e^{i \arg z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{|z|}{\bar{z}} = \frac{\frac{z}{2|z|}\bar{z} - |z|}{\bar{z}^2} = \frac{\sqrt{z\bar{z}} - 2\sqrt{z\bar{z}}}{2\bar{z}^2} = -\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{2\bar{z}} \frac{z}{\bar{z}} = -\frac{z}{2|z|\bar{z}}.$$

Estamos ya en condiciones de aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \partial h(z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho(|z|) e^{i \arg(z)} \right) = \rho'(|z|) \left(\frac{\partial}{\partial z}|z| \right) e^{i \arg z} + \rho(|z|) \left(\frac{\partial}{\partial z} e^{i \arg z} \right) = \\ &= \rho'(|z|) \frac{\bar{z}}{2|z|} \frac{|z|}{\bar{z}} + \rho(|z|) \frac{1}{2|z|} = \frac{1}{2} \left[\rho'(|z|) + \frac{1}{|z|} \rho(|z|) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial} h(z) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\rho(|z|) e^{i \arg(z)} \right) = \rho'(|z|) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|z| \right) e^{i \arg z} + \rho(|z|) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} e^{i \arg z} \right) = \\ &= \rho'(|z|) \frac{z}{2|z|} \frac{|z|}{\bar{z}} - \rho(|z|) \frac{z}{2|z|\bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{z}{\bar{z}} \left[\rho'(|z|) - \frac{1}{|z|} \rho(|z|) \right]. \end{aligned}$$

Una vez obtenida las expresiones de las derivadas procedemos a calcular su módulo al cuadrado:

$$|\partial h(z)|^2 = \frac{1}{4} \left| \rho'(|z|) + \frac{1}{|z|} \rho(|z|) \right|^2 = \frac{1}{4} \left[(\rho'(|z|))^2 + 2 \frac{\rho'(|z|)\rho(|z|)}{|z|} + \frac{(\rho(|z|))^2}{|z|^2} \right], \quad (3.26)$$

$$|\bar{\partial} h(z)|^2 = \frac{1}{4} \left| \rho'(|z|) - \frac{1}{|z|} \rho(|z|) \right|^2 = \frac{1}{4} \left[(\rho'(|z|))^2 - 2 \frac{\rho'(|z|)\rho(|z|)}{|z|} + \frac{(\rho(|z|))^2}{|z|^2} \right]. \quad (3.27)$$

Es evidente que $|h(z)|$ y las últimas dos expresiones son localmente integrables en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y por tanto podemos afirmar que $h \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Veamos ahora si es una transformación que conserva el sentido, con tal fin calcularemos el jacobiano, que como vimos en el capítulo anterior (2.29) viene dado por la siguiente expresión:

$$J(z, h) = |\partial h(z)|^2 - |\bar{\partial} h(z)|^2.$$

Si restamos las expresiones (3.26) y (3.27) obtenemos:

$$J(z, h) = \frac{\rho'(|z|)\rho(|z|)}{|z|}.$$

Observamos de nuevo que al ser ρ monótona creciente su derivada es positiva. Por otro lado, al estar definida $\rho(t)$ en $t \in [0, +\infty)$ y ser creciente solo toma el valor 0 para $t = 0$, dado que h está definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ podemos concluir que $J(z, h) > 0$ y por tanto h conserva la orientación.

Hasta ahora hemos demostrado que h es un homeomorfismo que conserva la orientación y que pertenece a la clase de Sóbolev. Nos queda ver si existe una función μ medible de manera que verifique la ecuación de Beltrami:

$$\bar{\partial} h(z) = \mu(z) \partial h(z).$$

Bastaría tomar la siguiente función:

$$\mu(z) = \frac{|z|\rho'(|z|) - \rho(|z|)}{|z|\rho'(|z|) + \rho(|z|)} \frac{z}{\bar{z}}.$$

Por lo argumentado con anterioridad, $\rho(|z|) > 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y además por ser ρ monótona estrictamente creciente tenemos que $\rho'(|z|) > 0$ y por tanto tenemos que el resultado de tomar módulo en la expresión anterior es:

$$|\mu(z)| = \begin{cases} \frac{|z|\rho'(|z|) - \rho(|z|)}{|z|\rho'(|z|) + \rho(|z|)} & \text{si } |z| > \frac{\rho(|z|)}{\rho'(|z|)} \\ \frac{\rho(|z|) - |z|\rho'(|z|)}{|z|\rho'(|z|) + \rho(|z|)} & \text{si } |z| \leq \frac{\rho(|z|)}{\rho'(|z|)} \end{cases} \quad (3.28)$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior tenemos que $|\mu(z)| \leq 1$, esto no es suficiente para concluir que los estiramientos radiales son aplicaciones cuasiconformes. Necesitamos demostrar que existe un $k < 1$ tal que $|\mu(z)| \leq k$. Calcularemos ese valor de k para funciones ρ concretas.

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

Calculamos la dilatación, $K(z)$, para ello tendremos en cuenta la definición vista en (3.9):

$$K(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}.$$

De este modo, tenemos que

$$K(z) = \max \left\{ \frac{|z|\rho'(|z|)}{\rho(|z|)}, \frac{\rho(|z|)}{|z|\rho'(|z|)} \right\}.$$

Vamos a ver algunos ejemplos de funciones ρ para los que es posible encontrar un $k \in (0, 1)$ tal que $\|\mu\|_\infty \leq k$.

Ejemplo 3.5. Comencemos por la función $\rho_1(t) = t^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Obviaremos el caso $\alpha = 1$ porque como ya hemos comentado es la función identidad y por tanto una aplicación conforme. Observamos que es una función estrictamente creciente y diferenciable en todo su dominio, menos en el 0 en el caso $\alpha < 1$. Si fijamos $r \in (0, \infty)$ y consideramos $z(\theta) = re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ siguiendo (3.28) tenemos que el módulo de la dilatación es:

$$|\mu(z)| = \begin{cases} \frac{\alpha r^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha + r^\alpha} & \text{si } r > \frac{r^\alpha}{\alpha r^{\alpha-1}} = \frac{r}{\alpha} \\ \frac{r^\alpha - \alpha r^\alpha}{\alpha r^\alpha + r^\alpha} & \text{si } r \leq \frac{r^\alpha}{\alpha r^{\alpha-1}} = \frac{r}{\alpha} \end{cases}$$

Por tanto,

- Si $\alpha > 1$ entonces

$$|\mu(z)| = \frac{r^\alpha(\alpha - 1)}{r^\alpha(1 + \alpha)} = \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha} < \frac{\alpha}{\alpha + 1} < 1.$$

En definitiva, podemos tomar $k = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$.

- Si $\alpha < 1$ entonces

$$|\mu(z)| = \frac{r^\alpha(1 - \alpha)}{r^\alpha(1 + \alpha)} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} < \frac{1}{\alpha + 1} < 1.$$

En definitiva, podemos tomar $k = \frac{1}{\alpha + 1}$.

Podemos concluir que si definimos la aplicación $h_1(z) = |z|^\alpha e^{i \arg z}$ con $\alpha \in (0, \infty)$ por lo visto en esta sección tenemos que h_1 es una aplicación cuasiconforme en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ahora, fijamos $\alpha = 2$ y realizamos todos los cálculos de este apartado para este caso particular y finalizaremos el ejemplo observando gráficamente como transforma circunferencias que pasan por el origen.

Tomamos la función $\rho_2(t) = t^2$ con $t \in [0, \infty)$ y definimos

$$h_2(z) = \rho_2(|z|)e^{i \arg(z)} = |z|^2 e^{i \arg(z)},$$

que es homeomorfismo por ser ρ_2 estrictamente creciente. Primero calculamos sus derivadas:

$$\partial h_2(z) = \frac{3|z|}{2}, \quad \bar{\partial} h_2(z) = \frac{z}{\bar{z}} \frac{|z|}{2}.$$

Para ver si h_2 pertenece al espacio de Sóbolev, vamos a calcular los siguientes módulos:

$$|h_2(z)|^2 = |z|^4,$$

$$|\partial h_2(z)|^2 = \frac{9|z|^2}{4},$$

$$|\bar{\partial} h_2(z)|^2 = \frac{|z|^2}{4}.$$

Es evidente que los módulos anteriores son localmente integrables en todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Veamos el valor del Jacobiano:

$$J(z, h_2) = |\partial h_2(z)|^2 - |\bar{\partial} h_2(z)|^2 = 2|z|^2 > 0, \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Para finalizar vamos a calcular el módulo del coeficiente de Beltrami:

$$|\mu_2(z)| = \frac{2|z|^2 - |z|^2}{2|z|^2 + |z|^2} = \frac{|z|^2}{3|z|^2} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, $|\mu_2(z)| \leq k < 1$ con $k \geq \frac{1}{3}$. Y podemos concluir que h_2 es una aplicación cuasiconforme.

Veamos ahora gráficamente como transforma la aplicación h_2 a las tres circunferencias parametrizadas por $z_1(\theta) = \frac{1}{2} \left(e^{i\pi(2\theta-1)} + 1 \right)$, $z_2(\theta) = \frac{5}{6} \left(e^{i\pi(2\theta-1)} + 1 \right)$ y $z_3(\theta) = \frac{7}{6} \left(e^{i\pi(2\theta-1)} + 1 \right)$ con $\theta \in (0, 1)$. Se trata de circunferencias que pasan por el origen y tienen su centro en $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{6}$.

Ejemplo 3.6. Tomamos ahora la aplicación $\rho_3(t) = e^t - 1$ con $t \in [0, \infty)$ es evidente que $\rho_3([0, \infty)) \subset [0, \infty)$, la función exponencial es estrictamente creciente e infinitamente diferenciable. Definimos

$$h_3(z) = \rho_3(|z|)e^{i \arg(z)} = \left(e^{|z|} - 1 \right) e^{i \arg(z)}$$

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

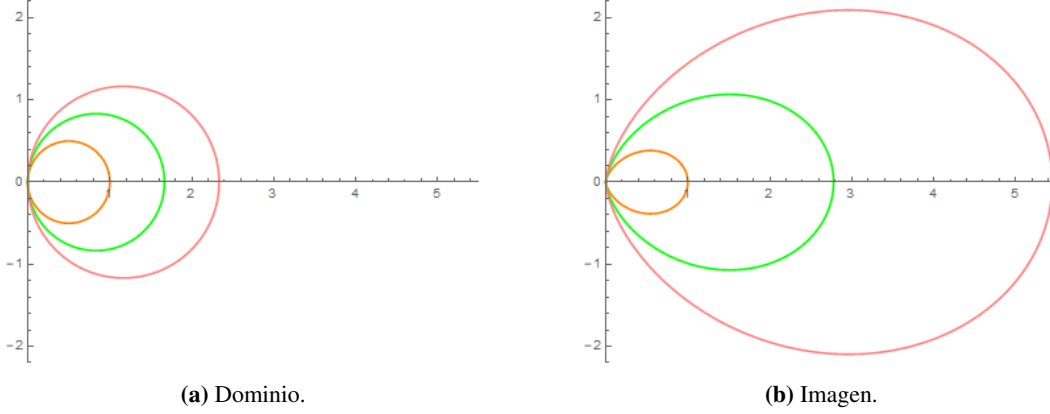


Figura 3.5: $h_2(z) = |z|^2 e^{i \arg(z)}$.

Estudiamos el módulo del coeficiente de Beltrami:

$$|\mu_3(z)| = \begin{cases} \frac{|z|e^{|z|} - (e^{|z|} - 1)}{|z|e^{|z|} + (e^{|z|} - 1)} & \text{si } |z| > \frac{e^{|z|} - 1}{e^{|z|}} \\ \frac{(e^{|z|} - 1) - |z|e^{|z|}}{|z|e^{|z|} + (e^{|z|} - 1)} & \text{si } |z| \leq \frac{e^{|z|} - 1}{e^{|z|}} \end{cases}$$

para poder acotar el módulo de μ_3 por algún $k < 1$ necesitamos trabajar con regiones acotadas. Comencemos estudiando el primer caso. Tomamos $z \in D(0, R) \setminus \{0\}$ con $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $|z| > \frac{e^{|z|} - 1}{e^{|z|}}$. Vamos a ver primero que valores de $|z|$ verifican esta desigualdad. Para facilitar la notación denotaremos $r = |z|$ y transformamos la desigualdad pasando todos los términos a un mismo lado de la desigualdad:

$$e^r (r - 1) + 1 > 0.$$

Definimos la función

$$g(r) = e^r (r - 1) + 1$$

Y estudiemos para que valores de $r \in (0, R)$ la aplicación es positiva. Para ello vamos a estudiar su monotonía:

$$\frac{\partial}{\partial r} g(r) = r e^r.$$

Como su derivada es positiva para para todo $r \in (0, R)$ tenemos que g es estrictamente creciente y como $g(0) = 0$ podemos afirmar que $g(r) > 0$ para todo $r \in (0, R)$. En definitiva, para todo $z \in D(0, R) \setminus \{0\}$ tenemos que $|z| > \frac{e^{|z|} - 1}{e^{|z|}}$.

Continuamos estudiando el módulo del coeficiente de Beltrami:

$$|\mu_3(z)| = \frac{|z|e^{|z|} - (e^{|z|} - 1)}{|z|e^{|z|} + (e^{|z|} - 1)} = \frac{|z|e^{|z|} + (e^{|z|} - 1) - 2(e^{|z|} - 1)}{|z|e^{|z|} + (e^{|z|} - 1)} = 1 - \frac{2(e^{|z|} - 1)}{|z|e^{|z|} + (e^{|z|} - 1)}.$$

3.4 Transformaciones conformes y cuasiconformes entre coronas circulares

Observamos que dado que $|z| > 0$ tenemos que $e^{|z|} > 1$ y por tanto la fracción es positiva. Si tomamos

$$m = \min_z \left\{ \frac{2(e^{|z|} - 1)}{|z|e^{|z|} + (e^{|z|} - 1)} : |z| \in [0, R] \right\},$$

podemos acotar el módulo del coeficiente de dilatación del siguiente modo:

$$|\mu_3(z)| \leq 1 - m < 1$$

En definitiva, tomando $k = 1 - m$.

Como resultado, hemos demostrado que para $z \in D(0, R) \setminus \{0\}$ la aplicación h_3 es una aplicación cuasiconforme. Veamos ahora como transforma esta aplicación a varias semirectas paralelas al eje imaginario. Tomamos $\alpha_1(t) = it + 1$, $\alpha_2(t) = it - 1$, $\alpha_3(t) = \frac{1}{2} + it$ y $\alpha_4(t) = \frac{1}{2} + it$ con $t \in (-1, 1)$. Podemos ver gráficamente la transformación de estas curvas en la figura 3.6

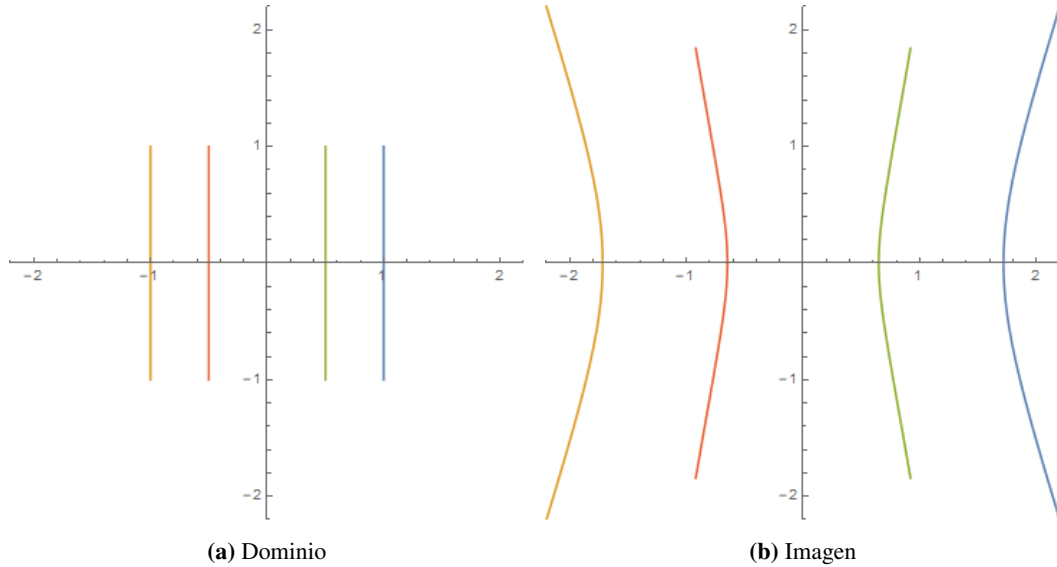


Figura 3.6: $h_s(z) = (e^{|z|} - 1)e^{i \arg(z)}$.

3.4 Transformaciones conformes y cuasiconformes entre coronas circulares

Por el teorema de Schottky sabemos que las transformaciones conformes entre coronas circulares mantienen la relación entre el radio interior y el exterior. En este apartado de-

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

mostraremos este teorema y posteriormente daremos un ejemplo de una familia de transformaciones cuasiconformes que permitirán transformar coronas circulares sin necesidad de mantener la relación entre el radio interior y el exterior.

3.4.1 Teorema de Schottky

Teorema 3.2 (Teorema de Schottky). *Existe una aplicación conforme que transforma la corona circular*

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < R_1\},$$

en la corona circular

$$A_2 = \{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z| < R_2\},$$

si y solo si $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.

El teorema de Schottky suele demostrarse haciendo uso del principio de reflexión de Schwarz como se puede ver en [2] pero en este trabajo hemos decidido seguir la demostración propuesta por [10] que se basa en la desigualdad de Cauchy-Schwartz en $L_2(A_1)$.

Demostración. Tomamos una aplicación conforme $f : A_1 \rightarrow A_2$.

Por ser $|f|$ una aplicación continua en A_1 podemos extender la función

$$\begin{array}{ccc} |f| : A_1 & \rightarrow & (r_2, R_2) \\ z & \mapsto & |f(z)| \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{ccc} |f| : \overline{A_1} & \rightarrow & [r_2, R_2] \\ z & \mapsto & |f(z)| \end{array}$$

Comportándose de la siguiente manera en el borde:

$$\left\{ \begin{array}{ll} |f(z)| = r_2 & \text{para } |z| = r_1 \\ |f(z)| = R_2 & \text{para } |z| = R_1 \end{array} \right\}, \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{ll} |f(z)| = R_2 & \text{para } |z| = r_1 \\ |f(z)| = r_2 & \text{para } |z| = R_1 \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

Ahora nuestro objetivo será utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el espacio $L^2(A_1)$. Con esta intención en mente procedemos a realizar las siguientes integrales:

$$\iint_{A_1} \frac{1}{|z|^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_1}^{R_1} \frac{1}{r} dr \right) d\theta = 2\pi \log \frac{R_1}{r_1}. \quad (3.30)$$

Para calcular la integral que viene a continuación definimos el cambio de variables $f(z) = w$ donde $J_f(z) dx dy = du dv$:

$$\iint_{A_1} \frac{J_f(z)}{|f(z)|^2} dx dy = \iint_{A_2} \frac{1}{|w|^2} du dv = 2\pi \log \frac{R_2}{r_2}. \quad (3.31)$$

3.4 Transformaciones conformes y cuasiconformes entre coronas circulares

Para mayor claridad vamos a denotar $g(z) = \frac{1}{|z|}$ y $h(z) = \frac{\sqrt{J_f(z)}}{|f(z)|}$. Dado que ya hemos visto que $\iint_{A_1} g^2 < \infty$ y $\iint_{A_1} h^2 < \infty$, podemos afirmar que $g, h \in L^2(A_1)$ y por ende estamos en condiciones de hacer uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \left(\iint_{A_1} \frac{\sqrt{J_f(z)}}{|z||f(z)|} dx dy \right)^2 &= \left(\iint_{A_1} gh \right)^2 \leq \\ &\leq \iint_{A_1} g^2 \iint_{A_1} h^2 = \left(\iint_{A_1} \frac{1}{|z|^2} dx dy \right) \left(\iint_{A_1} \frac{J_f(z)}{|f(z)|^2} dx dy \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vamos a calcular la primera integral de la desigualdad anterior de dos modos distintos:

1. Como f es conforme tenemos que $\bar{\partial}f(z) = 0$ y por tanto $\sqrt{J_f(z)} = \sqrt{|\partial f(z)|^2} = |f'(z)|$ y podemos escribir:

$$\iint_{A_1} \frac{\sqrt{J_f(z)}}{|z||f(z)|} dx dy = \iint_{A_1} \frac{|f'(z)|}{|z||f(z)|} dx dy.$$

Realizamos ahora el cambio de variables de cartesianas a polares, esto es, $dx dy = r dr d\theta$ y observamos que $r = |z|$. Una vez que hemos realizado este cambio de variables haremos uso de una ecuación de Cauchy-Riemann, (2.14), concretamente haremos uso de la primera igualdad. Escribimos esto:

$$\iint_{A_1} \frac{|f'(z)|}{|z||f(z)|} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_1}^{R_1} \frac{|f'(z)|}{|f(z)|} dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_1}^{R_1} \frac{1}{|f(z)|} \left| \frac{\partial f}{\partial r}(z) \right| dr \right) d\theta.$$

Obtenida esta última expresión tenemos en cuenta $|z| \geq |\operatorname{Re}(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, aplicando esta desigualdad obtenemos que:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_{r_1}^{R_1} \frac{1}{|f(z)|} \left| \frac{\partial f}{\partial r}(z) \right| dr \right) d\theta \geq \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_1}^{R_1} \left| \operatorname{Re} \left(\frac{1}{f(z)} \frac{\partial f}{\partial r}(z) \right) \right| dr \right) d\theta.$$

Por la teoría de integración podemos sacar el valor absoluto fuera de la integral del siguiente modo:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_{r_1}^{R_1} \left| \operatorname{Re} \left(\frac{1}{f(z)} \frac{\partial f}{\partial r}(z) \right) \right| dr \right) d\theta \geq \left| \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_1}^{R_1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{f(z)} \frac{\partial f}{\partial r}(z) \right) dr \right) d\theta \right|.$$

Observamos ahora que

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r} f(z)}{f(z)} = \frac{\partial}{\partial r} \log(f(z)),$$

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

y como el logaritmo complejo se define del siguiente modo: $\log z = \log |z| + i \arg z$, para cierta determinación de la función \arg , la parte real será el logaritmo real del módulo, esto es:

$$\left| \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_1}^{R_1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial r} f(z) \right) dr \right) d\theta \right| = \left| \int_0^{2\pi} \left(\int_{r_1}^{R_1} \frac{\partial}{\partial r} \log(|f(z)|) dr \right) d\theta \right|.$$

Esta última integral ya es inmediata y uniendo todo lo hecho hasta ahora podemos afirmar que

$$\iint_{A_1} \frac{\sqrt{J_f(z)}}{|z||f(z)|} dx dy \geq 2\pi \log \frac{R_2}{r_2}. \quad (3.33)$$

2. Argumentamos igual que al comienzo de la integral anterior y tenemos:

$$\iint_{A_1} \frac{\sqrt{J_f(z)}}{|z||f(z)|} dx dy = \iint_{A_1} \frac{|f'(z)|}{|z||f(z)|} dx dy = \int_{r_1}^{R_1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|}{|f(z)|} d\theta \right) dr.$$

En este punto, en vez de utilizar la primera ecuación de Cauchy-Riemann (2.14) haremos uso de la segunda, aquella donde aparece la derivada parcial con respecto a θ :

$$\int_{r_1}^{R_1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|}{|f(z)|} d\theta \right) dr = \int_{r_1}^{R_1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r|f(z)|} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(z) \right| d\theta \right) dr.$$

Luego, usaremos la desigualdad $|z| \geq |\operatorname{Im}(z)|$ que se verifica para todo $z \in \mathbb{C}$ y tenemos que

$$\int_{r_1}^{R_1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r|f(z)|} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(z) \right| d\theta \right) dr \geq \int_{r_1}^{R_1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial \theta} f(z) \right) \right| d\theta \right) dr.$$

De nuevo, por la teoría de integración tenemos que:

$$\int_{r_1}^{R_1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial \theta} f(z) \right) \right| d\theta \right) dr \geq \left| \int_{r_1}^{R_1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial \theta} f(z) \right) d\theta \right) dr \right|.$$

En este momento volvemos a utilizar la expresión del logaritmo complejo, solo que esta vez tenemos la parte imaginaria de la derivada, y por tanto obtenemos el argumento de f :

$$\left| \int_{r_1}^{R_1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{f(z)} \frac{\partial}{\partial \theta} f(z) \right) d\theta \right) dr \right| = \left| \int_{r_1}^{R_1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \arg(f(z)) d\theta \right) dr \right|.$$

De nuevo, hemos llegado a una integral inmediata y resumiendo tenemos que:

$$\iint_{A_1} \frac{\sqrt{J_f(z)}}{|z||f(z)|} dx dy \geq 2\pi \log \frac{R_1}{r_1}. \quad (3.34)$$

3.4 Transformaciones conformes y cuasiconformes entre coronas circulares

Para finalizar, volvemos a la desigualdad de Cauchy-Schwarz (3.32) y sustituimos las expresiones (3.30), (3.31), (3.33) y (3.34). Hemos conseguido las siguientes desigualdades:

$$4\pi^2 \left(\log \frac{R_1}{r_1} \right)^2 \leq \left(\iint_{A_1} gh \right)^2 \leq \iint_{A_1} g^2 \iint_{A_1} h^2 = 4\pi^2 \log \frac{R_1}{r_1} \log \frac{R_2}{r_2}$$

$$4\pi^2 \left(\log \frac{R_2}{r_2} \right)^2 \leq \left(\iint_{A_1} gh \right)^2 \leq \iint_{A_1} g^2 \iint_{A_1} h^2 = 4\pi^2 \log \frac{R_1}{r_1} \log \frac{R_2}{r_2}.$$

Podemos concluir que $\frac{R_2}{r_2} = \frac{R_1}{r_1}$, como queríamos demostrar.

□

3.4.2 Un ejemplo de transformación cuasiconforme entre coronas circulares

En el apartado anterior hemos visto que si tenemos que limitarnos a transformaciones conformes sólo podemos transformar una corona circular en otra en la que los radios sean proporcionales.

A continuación, vamos a comprobar siguiendo un ejemplo, que hemos tomado de [2], que existen transformaciones cuasiconformes que nos permiten transformar coronas circulares sin que se verifique la proporcionalidad entre los radios. Con este objetivo, definimos:

$$f_t : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

donde $A = \{z \in \mathbb{C} : R < |z| < 1\}$ y $R \in (0, 1)$, del siguiente modo:

$$f_t(z) = tz + \frac{1-t}{\bar{z}}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Primero de todo, observamos que si $t = 1$ tenemos un caso trivial, $f_1(z) = z$ por tanto vamos a suponer $t \neq 1$.

Antes de nada queremos estudiar para qué valores de t f_t es cuasiconforme en A para ello vamos a comenzar por estudiar cuándo es homeomorfismo. Con este objetivo vamos a estudiar para qué valores de t la aplicación anterior es inyectiva. Para facilitar los cálculos, reescribiremos la expresión de f_t utilizando las coordenadas polares, es decir, $z = re^{i\theta}$ con $r \in (R, 1)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. De este modo, obtenemos la siguiente expresión:

$$f_t(z) = tre^{i\theta} + \frac{1-t}{re^{-i\theta}} = \left(tr + \frac{1-t}{r} \right) e^{i\theta}.$$

Denotando

$$\rho(r, t) = tr + \frac{1-t}{r},$$

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

observamos que la función f_t transforma $C(0, r)$ en $C(0, \rho(r, t))$.

Como $\rho(1, t) = 1 > 0$ para que $\rho(r, t)$ sea inyectiva en $r \in (R, 1)$ necesitamos que $\rho(r, t) > 0$. Porque si ρ fuese negativa para algún $r \in (R, 1)$, por el teorema de Bolzano, existiría un $r_0 \in (r, 1)$ tal que $\rho(r_0, t) = 0$ y por tanto ρ transformaría todos los puntos de la circunferencia de radio r_0 en el punto origen.

Tenemos que buscar por tanto valores de t para los que $\rho(r, t) > 0$. Esto es:

$$tr + \frac{1-t}{r} > 0.$$

Vamos a despejar t de la expresión anterior, para ello multiplicamos por r que es positivo y sacamos factor común t :

$$t(r^2 - 1) + 1 > 0, \quad t(r^2 - 1) > -1,$$

observar que $r^2 - 1 < 0$ porque $r < 1$ y por tanto al dividir por $r^2 - 1$ cambiamos el sentido de la desigualdad y concluimos que:

$$t < \frac{-1}{r^2 - 1} = \frac{1}{1 - r^2},$$

tenemos que el $\min_{r \in (R, 1)} \frac{1}{1 - r^2} = \frac{1}{1 - R^2}$ y por tanto para que se cumpla que ρ es positiva para cualquier valor de $r \in (R, 1)$ tenemos que

$$t < \frac{1}{1 - R^2} \quad (3.35)$$

Hemos obtenido una condición necesaria para la inyectividad, nos queda encontrar una condición suficiente. Para ello, vamos a estudiar la monotonía de la función ρ . Fijamos t y calculamos los puntos críticos de la función ρ :

$$\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial r} = t - \frac{1-t}{r^2} = \frac{tr^2 + t - 1}{r^2} = 0,$$

cuando $t < 1$ el punto crítico es $r = \sqrt{\frac{1-t}{t}}$ y si $t > 1$ no tiene puntos críticos. Es fácil determinar que el punto crítico se trata de un mínimo. Podemos ver esto gráficamente en la figura 3.7. En estas gráficas hemos representado $\rho(r, t)$ en función de r fijado t . En la izquierda hemos fijado cierto $t < 1$ y en la derecha hemos fijado otro $t > 1$.

En las representaciones gráficas se hace evidente lo siguiente:

- Si $t < 1$ para que ρ sea monótona R debe situarse a la derecha del mínimo y por tanto

$$R > \sqrt{\frac{1-t}{t}} \quad \text{si y solo si} \quad t > \frac{1}{1+R^2} \quad \text{cuando} \quad t < 1.$$

3.4 Transformaciones conformes y cuasiconformes entre coronas circulares

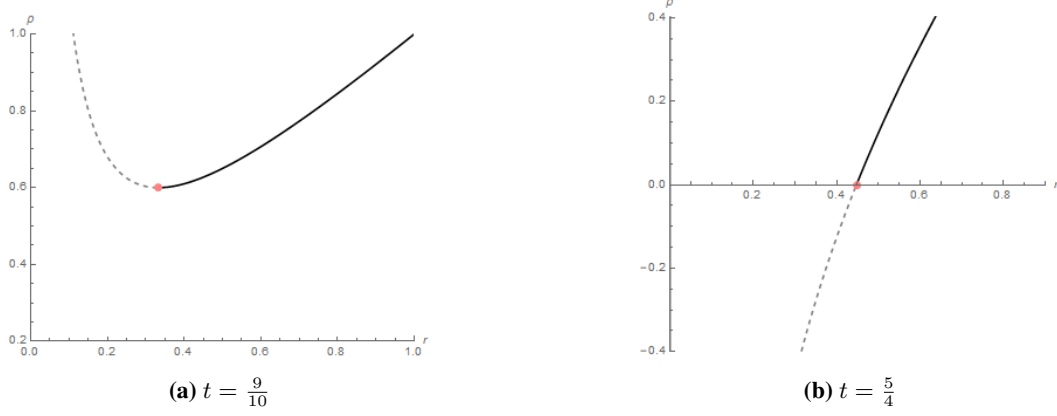


Figura 3.7: $\rho(r, t)$

- Si $t > 1$ tenemos que ρ es monótona creciente como función de r por ende lo que necesitamos es que R esté a la derecha del 0 y de nuevo obtenemos la condición (3.35). Esto es:

$$R > \sqrt{\frac{t-1}{t}} \quad \text{si y solo si} \quad t < \frac{1}{1-R^2} \quad \text{cuando} \quad t > 1.$$

Así f_t es inyectiva para

$$t \in \left(\frac{1}{1+R^2}, \frac{1}{1-R^2} \right). \quad (3.36)$$

Teniendo esto último presente si definimos

$$\hat{R}(t) := \rho(R, t) = tR + \frac{1-t}{R} > 0 \quad \text{con } t \in \left(\frac{1}{1+R^2}, \frac{1}{1-R^2} \right),$$

tenemos el siguiente homeomorfismo

$$f_t : A(R, 1) \longrightarrow A(\hat{R}(t), 1). \quad (3.37)$$

Veamos si este homomorfismo pertenece a la clase de Sóbolev. Para ello vamos a estudiar las derivadas:

$$\partial f_t(z) = t; \quad \bar{\partial} f_t(z) = -\frac{1-t}{\bar{z}^2}.$$

De aquí tenemos que

$$|\partial f_t(z)|^2 = t^2; \quad |\bar{\partial} f_t(z)|^2 = \frac{(1-t)^2}{|\bar{z}|^4}.$$

Las dos últimas expresiones son localmente integrables en $A(R, 1)$ y por tanto podemos concluir que $f_t \in W_{loc}^{1,2}(A(R, 1))$.

3. INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES CUASICONFORMES

Nota 6. Observamos que la derivada parcial con respecto a \bar{z} no depende de z tenemos por (2.7) que $\triangle f(x, y) = 4\partial \left(-\frac{1-t}{\bar{z}^2} \right) = 0$. Y por tanto, aunque la aplicación que hemos tomado, f_t , no es una aplicación conforme si tenemos que es una aplicación armónica.

Luego, vamos a calcular el jacobiano, por (2.29) tenemos que su expresión viene dada por:

$$J(f_t, z) = |\partial f_t(z)|^2 - |\bar{\partial} f_t(z)|^2 = t^2 - \frac{(1-t)^2}{|\bar{z}|^4}.$$

Como $z \in A(R, 1)$ tenemos que $|\bar{z}| = |z| > R > 0$ y por tanto tenemos la siguiente desigualdad:

$$J(f_t, z) = t^2 - \frac{(1-t)^2}{|\bar{z}|^4} > t^2 - \frac{(1-t)^2}{R^4} = \frac{R^4 t^2 - (1-t)^2}{R^4}.$$

En este momento, observamos que cuando hemos estudiado los valores de t para los que la aplicación f_t es inyectiva hemos determinado que cuando $t < 1$ tenemos que

$$R > \sqrt{\frac{1-t}{t}},$$

y de esta desigualdad obtenemos la siguiente:

$$R^4 > \left(\frac{1-t}{t} \right)^2.$$

Por otro lado cuando $t > 1$ tenemos que

$$R > \sqrt{\frac{t-1}{t}},$$

y por tanto

$$R^4 > \left(\frac{t-1}{t} \right)^2.$$

Como $(t-1)^2 = (1-t)^2$, en ambos casos tenemos la siguiente desigualdad:

$$J(f_t, z) > \frac{R^4 t^2 - (1-t)^2}{R^4} > \frac{\frac{(1-t)^2}{t^2} t^2 - (1-t)^2}{R^4} = 0.$$

En definitiva, como $J(f_t, z) > 0$ tenemos que f_t es una transformación que conserva la orientación.

Llegados a este punto, tenemos un homeomorfismo que pertenece a la clase de Sóbolev y conserva la orientación. Nos queda una única condición, para ello vamos a calcular el coeficiente de Beltrami μ y comprobaremos si verifica que está acotado para casi todo $z \in A(R, 1)$ por cierto $k < 1$:

$$\mu_t(z) = \frac{\bar{\partial} f_t(z)}{\partial f_t(z)} = -\frac{1-t}{t\bar{z}^2}.$$

3.4 Transformaciones conformes y cuasiconformes entre coronas circulares

Primero, calculamos su módulo y obtenemos:

$$|\mu_t(z)| = \frac{|1-t|}{t|z|^2} \leq \frac{|1-t|}{tR^2}.$$

- Si $t \in \left(\frac{1}{1+R^2}, 1\right)$ entonces:

$$|\mu_t(z)| \leq \left(\frac{1}{t} - 1\right) \frac{1}{R^2} < ((1+R^2) - 1) \frac{1}{R^2} = 1.$$

- Si $t \in \left(1, \frac{1}{1-R^2}\right)$ entonces:

$$|\mu_t(z)| \leq \left(-\frac{1}{t} + 1\right) \frac{1}{R^2} < (-(1-R^2) + 1) \frac{1}{R^2} = 1.$$

Así en ambos casos tenemos

$$\|\mu_t\|_\infty = \begin{cases} \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{t} - 1\right) & t \in \left(\frac{1}{1+R^2}, 1\right) \\ \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{1}{t}\right) & t \in \left(1, \frac{1}{1-R^2}\right) \end{cases}$$

Esto es, en ambos casos se tiene que $\|\mu\|_\infty$ toma cierto valor menor que 1. En consecuencia, f_t es cuasiconforme y lleva $A(R, 1)$ en $A(\hat{R}(t), 1)$.

Hasta ahora hemos encontrado una aplicación cuasiconforme que transforma una corona circular en otra corona circular. Esto lo teníamos con las aplicaciones conformes, nos quedaría ver que ya no tenemos la restricción de mantener la relación entre los radios. Para ello tenemos que ver los valores que toma $\hat{R}(t)$.

Calculamos su derivada para ver si tiene puntos críticos:

$$\hat{R}'(t) = R - \frac{1}{R} < 0.$$

Como la derivada es negativa para todo $t \in \mathbb{R}$ podemos concluir la función \hat{R} es estrictamente decreciente. Veamos que valores toma la imagen en los extremos:

$$\hat{R}\left(\frac{1}{1+R^2}\right) = \frac{2R}{1+R^2}; \quad \hat{R}\left(\frac{1}{1-R^2}\right) = 0.$$

En definitiva, hemos encontrado una aplicación cuasiconforme de $A(R, 1)$ a $A(S, 1)$ donde S puede tomar cualquier valor en el intervalo: $\left(0, \frac{2R}{1+R^2}\right)$.

Aplicaciones de las transformaciones cuasiconformes a la resolución de EDP: La jerarquía de Kadomtsev-Petviashvili sin dispersión (dKP)

4.1 La jerarquía de dKP y transformaciones cuasiconformes con coeficiente de Beltrami con soporte compacto.

Sea $\mu(z, \bar{z})$ una función medible tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ y cuyo soporte está contenido en un disco de radio R para algún $R > 0$.

Enunciamos de nuevo la ecuación de Beltrami ya vista:

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z \quad (4.1)$$

Si f es solución de la ecuación anterior satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$ ya que tendríamos que $f_{\bar{z}} = 0$. Supongamos además que f es analítica en $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$, entonces f admite un desarrollo de Laurent en potencias de z en $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$.

Para poder continuar necesitamos introducir los siguientes operadores definidos en $L^q(\mathbb{C})$:

$$Th(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} \frac{h(z_0)}{z_0 - z} dz_0 \wedge d\bar{z}_0, \quad \Pi h(z) := \frac{\partial Th}{\partial z}(z),$$

4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CUASICONFORMES A LA RESOLUCIÓN DE EDP

donde las integrales se toman en el sentido del principal valor de Cauchy. Luego, damos el siguiente lema cuya demostración podemos encontrar en [11]:

Lema 4.1. *Para cada $q > 1$ el operador Π define un operador acotado en $L^q(\mathbb{C})$ y para cada $0 \leq k < 1$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$k\|\Pi\|_q < 1, \quad (4.2)$$

para todo $|q - 2| < \delta$.

El siguiente teorema nos proporciona una propiedad de las soluciones de la ecuación de Beltrami con coeficiente de Beltrami con soporte compacto. Esta propiedad es el punto fundamental en la relación entre las aplicaciones cuasiconformes y la jerarquía dKP:

Teorema 4.1. *Sea una función medible μ con soporte compacto contenido en el círculo $|z| < R$ y tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Si existe $q = q(k) > 2$ tal que $k\|\Pi\|_q < 1$ se tiene lo siguiente:*

1. *Existe una única solución de (4.1) tal que su desarrollo de Laurent en cierto entorno de ∞ es*

$$p = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{z^k}.$$

Y además esta función p es un homeomorfismo en \mathbb{C} .

2. *Si f es solución de (4.1) en $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces existe Φ analítica en $p(\Omega)$ tal que $f = \Phi(p)$.*
3. *Si μ depende analíticamente de un conjunto de parámetros t_1, t_2, \dots, t_N entonces el homeomorfismo p depende analíticamente de los parámetros t_1, t_2, \dots, t_N .*

La demostración del teorema anterior puede verse en [9] y [12].

A partir de este momento desarrollaremos un método para la resolución de dKP siguiendo la teoría expuesta en [13].

Sea W una función analítica en \mathbb{C} y consideremos la ecuación $\bar{\partial}$

$$S_{\bar{z}} = \theta(R - |z|)W(S_z) \quad (4.3)$$

Donde θ es la función escalón de Heaviside, esto es:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Tenemos que si S es solución de (4.3) satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$ (porque $S_{\bar{z}} = 0$). Si además suponemos que S es analítica en $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$ se tiene que admite un desarrollo de Laurent en $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$.

4.1 La jerarquía de dKP y transformaciones cuasiconformes con coeficiente de Beltrami con soporte compacto.

Supongamos también que dicho desarrollo de Laurent tiene la forma:

$$S(z) = \sum_{j=1}^N t_j z^j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{z^k}. \quad (4.4)$$

En este caso S depende de los parámetros $t_j, j = 1, \dots, N$, derivando entonces (4.3) respecto a t_j y asumiendo las condiciones de regularidad necesarias tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial S}{\partial t_j} \right) = \theta(R - |z|) W'(S_z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial S}{\partial t_j} \right), \quad j = 1, \dots, N.$$

Tenemos que las funciones $\frac{\partial S}{\partial t_j}, j = 1, \dots, N$ son soluciones de la ecuación de Beltrami (4.1) con

$$\mu(z) = \theta(R - |z|) W'(S_z),$$

y con desarrollo de Laurent

$$\frac{\partial S}{\partial t_j} = z^j + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Supongamos que $\mu(z) = \theta(R - |z|) W'(S_z)$ satisface la condición de acotación del teorema, entonces teniendo en cuenta (4.5) y la primera conclusión del teorema tenemos que

$$p := \frac{\partial S}{\partial t_1} = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{k,t_1}}{z^k}, \quad (4.6)$$

es un homeomorfismo. Por tanto, tiene inversa, que denotaremos por $z(p)$. Es claro que $z(p)$ admite un desarrollo de Laurent en un entorno de $p = \infty$. De (4.6) se tiene que los primeros términos de dicho desarrollo vienen dados por

$$z = p - \frac{S_{1,t_1}}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad p \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Si en este punto utilizamos la expresión de las series de Laurent de las funciones $\frac{\partial S}{\partial t_j}, j = 1, \dots, N$ (4.5) y sustituimos z por (4.7) obtenemos:

$$\frac{\partial S}{\partial t_j} = z^j + O\left(\frac{1}{z}\right) = p^j + O(p^{j-1}). \quad (4.8)$$

De la segunda conclusión del teorema tenemos que estas funciones son analíticas de p . Luego, teniendo en cuenta su comportamiento cuando $p \rightarrow \infty$, se tiene que $\frac{\partial S}{\partial t_j}$ es un polinomio de grado j de p y de (4.8) se tiene que

$$\frac{\partial S}{\partial t_j} = (z^j)_+,$$

4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CUASICONFORMES A LA RESOLUCIÓN DE EDP

donde $(z^j)_+$ denota la parte correspondiente a las potencias no negativas de p en el desarrollo de z^j .

En este momento definimos las funciones

$$\Omega_j(p, \mathbf{t}) := (z^j)_+. \quad (4.9)$$

Y el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial S}{\partial t_j} = \Omega_j(p, \mathbf{t}) \quad j = 2, \dots, N. \quad (4.10)$$

Si existe la función S solución de (4.3) con desarrollo de Laurent de la forma (4.4) por construcción el conjunto de ecuaciones (4.10) son compatibles, por tanto si $j, l \in \{2, \dots, N\}$ con $j \neq l$ tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \left(\frac{\partial S}{\partial t_l} \right) = \frac{\partial}{\partial t_l} \left(\frac{\partial S}{\partial t_j} \right),$$

sustituyendo por (4.10) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \Omega_l = \frac{\partial}{\partial t_l} \Omega_j. \quad (4.11)$$

Desarrollemos el miembro de la izquierda de la igualdad anterior, (el de la derecha es idéntico con el cambio de índices $j \leftrightarrow l$) para ello usaremos primero la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \Omega_l(p, t) = \frac{\partial \Omega_l}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t_j} + \frac{\partial \Omega_l}{\partial t_j}.$$

En este punto, observamos que por como hemos definido p , (4.6), tenemos que

$$\frac{\partial p}{\partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} S \right) = \frac{\partial \Omega_j}{\partial t_1},$$

sustituimos esto último en la expresión anterior y podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \Omega_l = \frac{\partial \Omega_l}{\partial p} \frac{\partial \Omega_j}{\partial t_1} + \frac{\partial \Omega_l}{\partial t_j}.$$

A partir de este punto denotaremos por $x := t_1$. Volvemos a la condición de compatibilidad (4.11) y sustituimos por la expresión obtenida:

$$\frac{\partial \Omega_l}{\partial p} \frac{\partial \Omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_l}{\partial t_j} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial p} \frac{\partial \Omega_l}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_j}{\partial t_l}.$$

De donde obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \Omega_l}{\partial t_j} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial t_l} + \left(\frac{\partial \Omega_l}{\partial p} \frac{\partial \Omega_j}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial p} \frac{\partial \Omega_l}{\partial x} \right) = 0.$$

4.1 La jerarquía de dKP y transformaciones cuasiconformes con coeficiente de Beltrami con soporte compacto.

Definimos el corchete de Poisson como:

$$\{\Omega_l, \Omega_j\} = \frac{\partial \Omega_l}{\partial p} \frac{\partial \Omega_j}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial p} \frac{\partial \Omega_l}{\partial x}.$$

Concluimos por tanto que la condición de compatibilidad es

$$\frac{\partial \Omega_l}{\partial t_j} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial t_l} + \{\Omega_l, \Omega_j\} = 0, \quad j, l \in \{2, \dots, N\}, \quad j \neq l. \quad (4.12)$$

El conjunto de ecuaciones (4.12) constituye la llamada jerarquía de Kadomtsev-Petviashvili sin dispersión, usualmente abreviada como dKP de las iniciales en inglés *dispersionless Kadomtsev-Petviashvili*

4.1.1 La ecuación dKP

Seguimos con un ejemplo, para ello fijamos $N = 3$ y definimos $x := t_1$, $y := t_2$ y $t := t_3$. Y definimos u y v en relación con los coeficientes de p^{-1} y p^{-2} en el desarrollo de z , esto es:

$$z = p + \frac{u}{2p} + \frac{v}{4p^2} + \dots \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta esta definición de u y v tenemos por la definición de Ω_j , $j = 2, 3$ (4.9):

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= (z^2)_+ = p^2 + u, \\ \Omega_3 &= (z^3)_+ = p^3 + \frac{3}{2}up + \frac{3}{4}v. \end{aligned}$$

Imponemos la condición de compatibilidad, lo que nos dará la primera ecuación de la jerarquía dKP:

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial y} + \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial p} \frac{\partial \Omega_3}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial p} \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} \right) = 0$$

Sustituimos las expresiones de Ω_2 y Ω_3 y obtenemos lo siguiente:

$$u_t - \left(\frac{3}{2}u_y p + \frac{3}{4}v_y \right) + 2p \left(\frac{3}{2}u_x p + \frac{3}{4}v_x \right) - \left(3p^2 + \frac{3}{2}u \right) u_x = 0,$$

para que se verifique la igualdad, a su vez debe verificarse que cada coeficiente de p se anule, esto es:

$$p^2 : \quad 3u_x - 3u_x = 0 \quad (4.14)$$

$$p^1 : \quad -\frac{3}{2}u_y + \frac{3}{2}v_x = 0 \quad (4.15)$$

$$p^0 : \quad u_t - \frac{3}{4}v_y - \frac{3}{2}uu_x = 0 \quad (4.16)$$

4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CUASICONFORMES A LA RESOLUCIÓN DE EDP

La ecuación (4.14) se satisface trivialmente. De la ecuación (4.15) obtenemos que $v_x = u_y$, si derivamos con respecto a la variable y , obtenemos que $v_{xy} = u_{yy}$. Si ahora derivamos con respecto a la variable x la expresión (4.16) y sustituimos v_{yx} tenemos que

$$u_{xt} - \frac{3}{4}u_{yy} - \frac{3}{2}(uu_x)_x = 0.$$

Que escrito de otro modo es una ecuación en derivadas parciales conocida con el nombre de ecuación de Kadomtsev-Petviashvili sin dispersión, en inglés *dispersionless Kadomtsev-Petviashvili*, dKP. Es el primer miembro de una jerarquía de ecuaciones en derivadas parciales sin dispersión (jerarquía dKP) que se obtiene a partir del conjunto de condiciones de compatibilidad (4.12).

$$\left(u_t - \frac{3}{2}uu_x\right)_x = \frac{3}{4}u_{yy}. \quad (4.17)$$

Esta ecuación es un modelo en dinámica de flúidos.

Antes de empezar a describir el método que vamos aplicar para determinar soluciones, debemos de recordar que en la discusión anterior hemos hecho varias hipótesis que tendremos que comprobar más adelante que se satisfacen. Estas hipótesis han sido:

Condición 1: S es analítica en $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$.

Condición 2: El desarrollo de Laurent de S en $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$ es de la forma (4.4).

Condición 3: $\mu(z) = \theta(R - |z|)W'(S_z)$ satisface la acotación del enunciado del teorema. Respecto a esta última hipótesis bastará comprobar que existe cierto abierto en el espacio de parámetros $(x := t_1, t_2, \dots, t_N)$ tal que para cualquier valor dado de $k \in (0, 1)$ se tiene que $\|\mu(z)\|_\infty \leq k$. En efecto, de acuerdo con el lema 4.1 tenemos que el operador Π está acotado en $L^q(\mathbb{C})$ para cada $q > 1$. De esta forma, eligiendo un $q > 2$ arbitrario, existe $\tilde{k} > 0$ tal que

$$\tilde{k} \|\Pi\|_q < 1,$$

y así si $\|\mu\|_\infty \leq k$ tal que $k \leq \tilde{k}$ y $k < 1$ se satisfacen las hipótesis del teorema 4.1. Aquí no vamos a trabajar con el operador Π , por lo que necesitaremos asegurarnos de que dado $k \in (0, 1)$ podemos encontrar un abierto U_k en el espacio de parámetros $(x := t_1, y := t_2, t_3, \dots, t_N)$ para el que se tiene que

$$\|\mu(z, x, y, t_3, \dots, t_N)\|_\infty \leq k \quad \text{si} \quad (x, y, t_3, \dots, t_N) \in U_k.$$

4.2 El método de determinación de soluciones

Con el objetivo de encontrar soluciones en la ecuación (4.17) volvemos de nuevo a la expresión de la ecuación $\bar{\partial}$ (4.3), esto es,

$$S_{\bar{z}} = \theta(R - |z|)W(S_z).$$

4.2 El método de determinación de soluciones

Si derivamos con respecto a z en $|z| \leq R$ (en el caso contrario tenemos la función nula) obtenemos la expresión siguiente:

$$S_{\bar{z}z} = W'(S_z)S_{zz}.$$

Si denotamos por $m = S_z = \partial S$ tenemos que la expresión anterior se transforma en

$$m_{\bar{z}} = W'(m)m_z. \quad (4.18)$$

Esta última ecuación es una ecuación casi-lineal cuyo sistema característico asociado es un sistema dinámico de la forma:

$$\begin{cases} \dot{z} &= W'(m) \\ \dot{\bar{z}} &= -1 \\ \dot{m} &= 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Como $W'(m)\dot{\bar{z}} + \dot{z} = 0$, tenemos que las integrales primeras del sistema dinámico (4.19) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= m, \\ \varrho_2 &= W'(m)\bar{z} + z, \end{aligned}$$

y por tanto la solución general viene dada por

$$W'(m)\bar{z} + z - f(m) = 0, \quad (4.20)$$

donde f es una función arbitraria. Si multiplicamos por m_z en (4.20) obtenemos

$$W'(m)m_z\bar{z} + zm_z - f'(m)m_z = 0.$$

El primer y el tercer sumando tienen integral inmediata. Para el segundo sumando, observamos un momento que

$$\frac{\partial}{\partial z}(zm) = m + zm_z = \frac{\partial S}{\partial z} + zm_z.$$

Si despejamos zm_z tenemos que $zm_z = \frac{\partial}{\partial z}(zm - S)$ y por tanto podemos escribir lo siguiente:

$$\partial[W(m)\bar{z} + zm - S - f(m)] = 0.$$

En definitiva tenemos que

$$S = W(m)\bar{z} + zm - f(m). \quad (4.21)$$

Salvo una constante que podemos englobar en la función arbitraria f .

Si realizamos un resumen de lo obtenido hasta este momento obtenemos un método de resolución para las ecuaciones de la jerarquía dKP.

4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CUASICONFORMES A LA RESOLUCIÓN DE EDP

Partimos de $W(\epsilon)$ y elegimos una función arbitraria $f(m)$. Una vez conocemos las expresiones de W y f procedemos a resolver (4.20), o lo que es lo mismo, obtenemos la expresión de la función $m(z, \bar{z})$ para $|z| < R$. En este punto conocemos lo suficiente como para simplemente sustituir en (4.21) y de este modo determinar $S(z, \bar{z})$ para $|z| < R$, aunque para evitar confusiones denotaremos esta función como $S_{in}(z, \bar{z})$.

Solo nos queda extender S_{in} a $|z| \geq R$, esto lo hacemos imponiendo que sea una función analítica en $|z| > R$ y continua en $|z| = R$. Con este objetivo definimos en $|z| \geq R$:

$$S_{out}(z) = S_{in}\left(z, \frac{R^2}{z}\right).$$

Una vez que tenemos la expresión de S en todo \mathbb{C} nos queda comprobar tres cosas. La primera es que $W'(S_z)$, que es el coeficiente de Beltrami según (4.18) satisface la propiedad de acotación que aparece en el teorema 4.1. (**condición 3**).

En segundo lugar tenemos que comprobar que efectivamente S_{out} es analítica en $|z| \geq R$ (**condición 1**) y por último que S_{out} tiene un desarrollo de Laurent de la forma (4.4) (**condición 2**).

Si tenemos que se satisfacen estas tres condiciones de acuerdo con el teorema 4.1 la aplicación

$$p = \frac{\partial S}{\partial x},$$

es una transformación cuasiconforme.

Como nuestro objetivo en este apartado era encontrar soluciones de las ecuaciones de la jerarquía dKP (4.12) tomamos la función arbitraria f dependiente de parámetros indeterminados entonces

- La condición

$$S_{out}(z) = \sum_{n=1}^N t_n z^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{z^k}, \quad (4.22)$$

permite expresar los parámetros en términos de las variables $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$.

- El desarrollo de $z = z(p)$, función inversa de $p = p(z)$ en un entorno del infinito nos determina las funciones $u = u(\mathbf{t}), v = v(\mathbf{t}), \dots$

4.3 Un ejemplo sencillo: solución estacionaria de la ecuación dKP

Vamos a aplicar el método anterior para determinar una transformación cuasiconforme que nos conduzca a una solución de la ecuación dKP (4.17). Para ello, tomamos $W(m) = m^2$ y fijamos el radio del disco como $R = 1$.

Primero, elegimos la función $f(m) = am^2 + bm + c$, con a, b y c parámetros reales que al imponer (4.22) serán funciones de los parámetros $x := t_1, y := t_2, t_3 \dots, t_N$. Después,

4.3 Un ejemplo sencillo: solución estacionaria de la ecuación dKP

obtenemos la expresión de m a través de la ecuación (4.20). Dado que

$$W'(m) = 2m,$$

$$f'(m) = 2am + b.$$

Sustituimos estas igualdades en (4.20) y tenemos la siguiente ecuación:

$$2m\bar{z} + z - 2am - b = 0.$$

Despejamos m en función de z y \bar{z} :

$$m(z, \bar{z}) = -\frac{z - b}{2(\bar{z} - a)}, \quad |z| < 1.$$

Ahora que conocemos todas las funciones implicadas en (4.21) tenemos la expresión de S :

$$S_{in}(z, \bar{z}) = -\frac{(z - b)^2}{4(\bar{z} - a)} - c, \quad |z| < 1. \quad (4.23)$$

Luego, extendemos S a $|z| \geq 1$ como una función analítica, para ello tomamos

$$S_{out}(z) = S_{in}\left(z, \frac{1}{z}\right) = -\frac{(z - b)^2}{4\left(\frac{1}{z} - a\right)} - c = -\frac{z(z - b)^2}{4(1 - az)} - c, \quad |z| \geq 1. \quad (4.24)$$

Ahora, calculamos su serie de Laurent para $z \rightarrow \infty$ haciendo uso del software `Mathematica`.

$$S_{out}(z) = \frac{1}{4a}z^2 + \frac{1 - 2ab}{4a^2}z + \frac{1 - 2ab + a^2b^2 - 4a^3c}{4a^3} + \frac{1 - 2ab + a^2b^2}{4a^4}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (4.25)$$

Por (4.4) tenemos que cada t_j es el coeficiente de z^j con $j = 1, \dots, N$, en nuestro caso $N = 2$ y por la notación usada con anterioridad tenemos $y = t_2$ y $x = t_1$. Además, el coeficiente de z^0 debe anularse. Con esto en mente tenemos las siguientes ecuaciones

$$y = \frac{1}{4a}, \quad (4.26)$$

$$x = \frac{1 - 2ab}{4a^2}, \quad (4.27)$$

$$0 = \frac{1 - 2ab + a^2b^2 - 4a^3c}{4a^3}. \quad (4.28)$$

Despejamos de las tres ecuaciones anteriores a , b y c en función de x e y . De la primera ecuación (4.26) obtenemos:

$$a = \frac{1}{4y}. \quad (4.29)$$

Despejando b en (4.27) y sustituyendo el valor de a obtenido en (4.29) tenemos:

$$b = \frac{1 - 4a^2x}{2a} = \frac{1 - 4\left(\frac{1}{4y}\right)^2x}{2\frac{1}{4y}} = \frac{4y - \frac{x}{y}}{2} = \frac{4y^2 - x}{2y}. \quad (4.30)$$

4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CUASICONFORMES A LA RESOLUCIÓN DE EDP

Ahora despejamos c en la ecuación (4.28) y sustituimos los valores de a y b ya obtenidos en (4.29) y (4.30):

$$c = \frac{1 - 2ab + a^2b^2}{4a^3} = \frac{1 - 2\frac{1}{4y}\frac{4y^2 - x}{2y} + \left(\frac{1}{4y}\right)^2 \left(\frac{4y^2 - x}{2y}\right)^2}{4\left(\frac{1}{4y}\right)^3} = \frac{(x + 4y^2)^2}{4y}. \quad (4.31)$$

En este punto nos queda comprobar las condiciones,

- La primera condición que tenemos que comprobar es que S_{out} sea efectivamente analítica. Como (4.24) es una función racional es evidente que será analítica siempre y cuando el denominador no se anule. Esto es, cuando $|az - 1| \neq 0$, o equivalentemente cuando $z \neq \frac{1}{a}$. Como tenemos que $|z| \geq 1$ podemos concluir que mientras

$$|a| > 1, \quad (4.32)$$

la función S_{out} será analítica en $|z| \geq 1$.

- La segunda condición que tenemos que comprobar es si S_{out} tiene un desarrollo de Laurent de la forma (4.4). Esto ya lo hemos comprobado en (4.25) y al poder despejar a, b y c en función de x, y . Teniendo precisamente estas expresiones (4.26), (4.27) en cuenta podemos reescribir la serie de Laurent del siguiente modo:

$$S_{out}(z) = yz^2 + xz + (x^2 + 8xy^2 + 16y^4) \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

En definitiva, S_{out} tiene una serie de Laurent de la forma deseada.

- La última condición es que $|\mu(z)| < k$, con $k \in (0, 1)$. Lo cual es equivalente a

$$|W'(S_z)| = \left| \frac{z - b}{\bar{z} - a} \right| < k, \quad \text{para } |z| < 1.$$

Para ello acotamos superiormente el numerador del siguiente modo:

$$|z - b| \leq |z| + |b| < 1 + |b|$$

Y el denominador lo acotamos inferiormente:

$$|\bar{z} - a| \geq ||z| - |a|| = ||a| - |z|| > ||a| - 1| = |a| - 1.$$

Donde la última igualdad se tiene por (4.32). Teniendo en cuenta las dos desigualdades anteriores tenemos que

$$|\mu(z)| < \frac{1 + |b|}{|a| - 1} < k. \quad (4.33)$$

4.3 Un ejemplo sencillo: solución estacionaria de la ecuación dKP

Nos queda comprobar para que valores de x, y se verifican las condiciones (4.32) y (4.33). Para ello sustituimos en las desigualdades las expresiones (4.29) y (4.30):

$$|a| = \frac{1}{4|y|} > 1, \quad |y| < \frac{1}{4}. \quad (4.34)$$

$$\frac{1 + |b|}{|a| - 1} = \frac{1 + \frac{|4y^2 - x|}{2|y|}}{\frac{1}{4|y|} - 1} < k, \quad |2y| + |4y^2 - x| < \frac{k}{2} - 2k|y|. \quad (4.35)$$

En este ejemplo sencillo puede comprobarse que para cualquier $k \in (0, 1)$ si se toma, por ejemplo, $x = 0$ e $y = k/16$ se satisfacen las desigualdades (4.34) - (4.35). Como estas desigualdades definen un abierto en \mathbb{R}^2 y es no vacío, se tiene que existe un abierto en el plano (x, y) en el que se satisfacen las condiciones independientemente del valor de k . En dicha región, p es una transformación cuasiconforme. Podemos ver gráficamente la región para dos valores de k diferentes en la figura 4.1 .

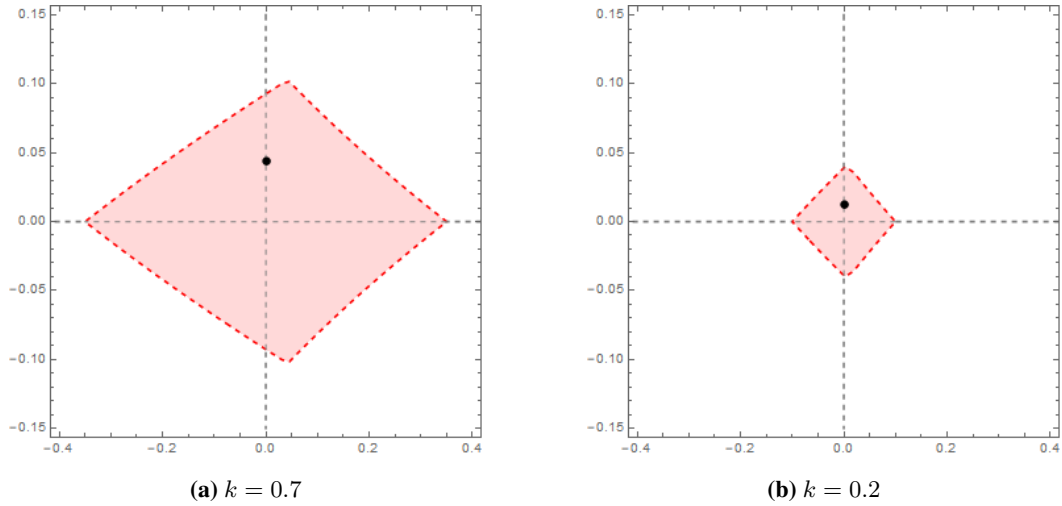


Figura 4.1: Región en el espacio (x, y) donde se satisfacen las **condiciones 1, 2 y 3**.

En este punto, observamos que por la definición de p , (4.6) tenemos que

$$p = \frac{\partial S_{out}(z)}{\partial x} = z + \frac{2x + 8y^2}{z} + \dots$$

Si calculamos su inversa siguiendo (4.7) obtenemos lo siguiente:

$$z = p - \frac{2x + 8y^2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

A su vez, por (4.13), podemos llegar a obtener el valor de u :

$$u(x, y) = -4x - 16y^2. \quad (4.36)$$

4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CUASICONFORMES A LA RESOLUCIÓN DE EDP

Por otra parte, que (4.36) es solución de la ecuación dKP para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lo podemos comprobar directamente sustituyendo (4.36) en la ecuación dKP (4.17).

4.4 Nuevo ejemplo: solución de la ecuación dKP dependiente del tiempo

Tomamos de nuevo $W(m) = m^2$ y $R = 1$. De la ecuación (4.20) tenemos que si hacemos $\bar{z} = 0$ y definimos $m_0(z) = m(z, 0)$ se obtiene

$$z = f'(m_0(z)), \quad (4.37)$$

es decir, f' es la función inversa de m_0 . En [14] se clasifican elecciones adecuadas de W y f para que el método que hemos desarrollado nos proporcione funciones S con el desarrollo de Laurent, (4.4). En particular, se comprueba que para $W(m) = m^2$ se obtienen funciones f adecuadas a partir de (4.37) tomando para $m_0(z)$ polinomios de grado 1 (como sería el ejemplo anterior) o grado 2. Tomamos para este ejemplo el segundo caso, esto es, definimos

$$m_0(z) = az^2 + bz + c, \quad (4.38)$$

siendo a, b , y c parámetros que tendremos que determinar para que S satisfaga un desarrollo de Laurent de la forma, (4.4).

De acuerdo con (4.37)

$$f'(m) = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a(m - c)}}{2a},$$

y por tanto

$$f(m) = \frac{(b^2 + 4am - 4ac)^{\frac{3}{2}}}{12a^2} - \frac{b}{2a}m + d,$$

siendo d un nuevo parámetro indeterminado. De (4.20) tenemos que

$$2m\bar{z} + z - \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a(m - c)}}{2a} = 0,$$

y en consecuencia

$$m(z, \bar{z}) = -\frac{\sqrt{1 - 4\bar{z}(4ac\bar{z} + 2az - b^2\bar{z} + b)} + 4az\bar{z} + 2b\bar{z} - 1}{8a\bar{z}^2}, \quad (4.39)$$

donde se ha tomado el signo menos en la raíz para que

$$\lim_{\bar{z} \rightarrow 0} m(z, \bar{z}) = az^2 + bz + c,$$

de acuerdo con (4.38). De (4.21) y de (4.39) tenemos que

4.4 Nuevo ejemplo: solución de la ecuación dKP dependiente del tiempo

$$\begin{aligned}
S_{in}(z, \bar{z}) &= W(m)\bar{z} + zm - f(m) = \\
&= -\frac{-3 + 6b\bar{z} + 12az\bar{z} + 24ac\bar{z}^2 + 24abz\bar{z}^2 + 24a^2z^2\bar{z}^2 + 96a^2d\bar{z}^3}{96a^2\bar{z}^3} \\
&\quad - \frac{3\sqrt{1 - 4\bar{z}(b - b^2\bar{z} + 2a(z + 2c\bar{z}))}}{96a^2\bar{z}^3} \\
&\quad - \frac{1}{24\sqrt{2}a^2} \left(\frac{1 + 2\bar{z}(-b + b^2\bar{z} - 2a(z + 2c\bar{z})) - \sqrt{1 - 4\bar{z}(b - b^2\bar{z} + 2a(z + 2c\bar{z}))}}{\bar{z}^2} \right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Dado lo complicado de la expresión de $S_{in}(z, \bar{z})$ para imponer que $S_{out}(z)$ tiene el desarrollo de Laurent (4.4) y determinar así las funciones a, b y c tenemos en cuenta que de

$$S_{out}(z) = S_{in}\left(z, \frac{1}{z}\right), \quad |z| \geq 1,$$

obtenemos

$$\partial S_{out}(z) = \partial S_{in}\left(z, \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z^2} \bar{\partial} S_{in}\left(z, \frac{1}{z}\right), \quad |z| > 1. \tag{4.41}$$

En este punto observamos que S satisface dentro del disco la ecuación $S_{\bar{z}} = W(S_z) = S_z^2$ y teniendo presente la definición de m tenemos que:

$$\begin{aligned}
m &= \partial S_{in} & |z| < 1, \\
\bar{\partial} S_{in} &= (\partial S_{in})^2 & |z| < 1,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

así, tomando límite $|z| \rightarrow 1$ en (4.41) y en (4.42) encontramos

$$\partial S_{out}(z) = m\left(z, \frac{1}{z}\right) - \left[\frac{m\left(z, \frac{1}{z}\right)}{z} \right]^2, \quad \text{en } |z| = 1. \tag{4.43}$$

Dado que vamos a imponer que tanto $S_{out}(z)$ como $\partial S_{out}(z)$ sean funciones analíticas en $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$, extendemos $\partial S_{out}(z)$ a $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$ a partir de (4.43) y tenemos

$$\begin{aligned}
\partial S_{out}(z) &= \frac{z^2}{8a} \left(-\sqrt{-\frac{16ac}{z^2} - 8a + \frac{4b^2}{z^2} - \frac{4b}{z} + 1 - \frac{2b}{z} + 1 - 4a} \right) - \\
&\quad - \frac{z^2}{64a^2} \left(-\sqrt{-\frac{16ac}{z^2} - 8a + \frac{4b^2}{z^2} - \frac{4b}{z} + 1 - \frac{2b}{z} + 1 - 4a} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

De acuerdo con (4.4) y usando la notación previa $t := t_3$, $y := t_2$ y $x := t_1$, se tiene que $\partial S_{out}(z)$ debe tener en $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$ un desarrollo de Laurent de la forma

$$\partial S_{out}(z) = 3tz^2 + 2yz + x - \frac{S_1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \tag{4.45}$$

4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CUASICONFORMES A LA RESOLUCIÓN DE EDP

así igualando los coeficiente de cada potencia de z , z^k con $k = 2, 1, 0$ tenemos que

$$3t = \frac{(1 - 8a)^{3/2} - 1}{32a^2} + \frac{3}{8a} - \frac{3}{4},$$

$$2y = \frac{(-4a - \sqrt{1 - 8a} + 1) b}{8a^2},$$

$$x = \frac{(1 - \sqrt{1 - 8a}) c}{4a} - \frac{\left(\frac{4a - 1}{\sqrt{1 - 8a}} + 1 \right) b^2}{8a^2}.$$

O equivalentemente:

$$a = \frac{1 + 36t + \sqrt{(1 - 12t)^3}}{18(1 + 4t)^2}, \quad (4.46)$$

$$b = -\frac{16a^2y}{4a + \sqrt{1 - 8a} - 1}, \quad (4.47)$$

$$c = \frac{8\sqrt{1 - 8a}a^2x + (4a + \sqrt{1 - 8a} - 1) b^2}{2a(8a + \sqrt{1 - 8a} - 1)}. \quad (4.48)$$

Nota 7. Antes de continuar, observamos que la transformación $(x, y, t) \longleftrightarrow (a, b, c)$ es inyectiva. Esto es, porque

$$a(t) = \frac{1 + 36t + \sqrt{(1 - 12t)^3}}{18(1 + 4t)^2},$$

es monótona creciente y la indeterminación en $t = -\frac{1}{4}$ es evitable porque

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{4}^+} a(t) = \frac{3}{32},$$

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{4}^-} a(t) = \frac{3}{32}.$$

Además,

$$b(t, y) = -\frac{16a^2y}{4a + \sqrt{1 - 8a} - 1},$$

es lineal en y y

$$c(x, y, t) = \frac{8\sqrt{1 - 8a}a^2x + (4a + \sqrt{1 - 8a} - 1) b^2}{2a(8a + \sqrt{1 - 8a} - 1)},$$

es lineal en x .

4.4 Nuevo ejemplo: solución de la ecuación dKP dependiente del tiempo

Por otro lado del coeficiente de z^{-2} en (4.45) tenemos que

$$S_1 = \frac{(2b^2 + c - 8ac)^2}{(1 - 8a)^{\frac{5}{2}}}. \quad (4.49)$$

Si sustituimos el valor de c , (4.48) en la expresión anterior y derivamos con respecto a x (nótese que a y b no dependen de x) obtenemos que:

$$u = -2 \frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{8 \left(b^2 [4a (\sqrt{1-8a} - 2) - \sqrt{1-8a} + 1] - 8a^2 x (1-8a)^{\frac{3}{2}} \right)}{(1-8a) (8a + \sqrt{1-8a} - 1)^2}. \quad (4.50)$$

Con (4.46) y (4.47) podemos eliminar a y b de (4.50) y obtenemos para u la ecuación implícita:

$$3(4t+1)(12t-1)^3 u^2 + 8(12t-1)^2 u (12tx - x - 4y^2) + 16 (12tx - x - 4y^2)^2 = 0, \quad (4.51)$$

cuya solución viene dada por:

$$u(x, y, t) = \frac{4 (2 + \sqrt{1-12t}) (12tx - x - 4y^2)}{3(1-12t)^{3/2}(4t+1)}. \quad (4.52)$$

Igual que en el ejemplo anterior tenemos que podemos comprobar que (4.52) es solución de la ecuación dKP para $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ y para $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right)$, sustituyendo (4.52) en la ecuación dKP (4.17). Más aún, teniendo en cuenta que dKP es invariante si hacemos la transformación $x \rightarrow -x, t \rightarrow -t$ tenemos que

$$\hat{u}(x, y, t) = u(-x, y, -t) = -\frac{4 (2 + \sqrt{1+12t}) (12tx + x - 4y^2)}{3(1+12t)^{3/2}(4t-1)},$$

es también solución de dKP en $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right)$ y en $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$. No obstante, queremos también comprobar que existe un conjunto abierto en el espacio de las variables (x, y, t) para el que la función (4.6)

$$p(z) = \frac{\partial S}{\partial x} = z + \frac{\frac{\partial S_1}{\partial x}}{z} = z + \frac{2b^2 - (1 + \sqrt{1-8a} - 4a) (8a-1) x}{(1-8a)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

es una transformación cuasiconforme y para ello tenemos que comprobar que se satisfacen las **condiciones 1, 2 y 3**. Debido a que las expresiones son mucho más complicadas recurriremos a estimaciones numéricas.

Primero vamos a estudiar para que valores de a, b y c es S_z analítica en $|z| > 1$.

4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CUASICONFORMES A LA RESOLUCIÓN DE EDP

Como S_z tiene una raíz con dos puntos de ramificación z_1, z_2 , soluciones de la ecuación:

$$-\frac{16ac + 4b^2}{z^2} - \frac{4b}{z} + 1 - 8a = 0.$$

Para poder elegir una determinación de la raíz analítica fuera del disco unidad tenemos que imponer que los puntos de ramificación:

$$\begin{aligned} |z_1| &= \left| \frac{2 \left(-2\sqrt{-8a^2c + 2ab^2 + ac} - b \right)}{8a - 1} \right| < 1, \\ |z_2| &= \left| \frac{2 \left(+2\sqrt{-8a^2c + 2ab^2 + ac} - b \right)}{8a - 1} \right| < 1, \end{aligned} \quad (4.53)$$

y así se puede tomar una determinación de la raíz tal que el corte está en el disco unidad.

Por otra parte, para simplificar los cálculos denotamos

$$A = 1 - 4az\bar{z} - 2b\bar{z},$$

$$B = 1 - 4\bar{z} (4ac\bar{z} + 2az - b^2\bar{z} + b),$$

y teniendo en cuenta (4.39) podemos escribir:

$$\mu(z) = \frac{A - \sqrt{B}}{4a\bar{z}^2} = \frac{A^2 - B}{4a\bar{z}^2 (A + \sqrt{B})}.$$

Haciendo cuentas observamos que

$$\frac{A^2 - B}{4a\bar{z}^2} = 4az^2 + 4bz + 4c,$$

y por tanto podemos escribir

$$\mu(z) = \frac{4(az^2 + bz + c)}{A + \sqrt{B}}.$$

Ahora, dado k para el que se necesita que $\|\mu\|_\infty < k$, tenemos que comprobar que se verifican las desigualdades (4.53) y

$$\left| \frac{4(az^2 + bz + c)}{A + \sqrt{B}} \right| < k. \quad (4.54)$$

Tenemos de nuevo que las desigualdades (4.53) y (4.54) nos definen un conjunto abierto en el espacio (a, b, c) , así dado k basta que encontremos un punto (a_0, b_0, c_0) para el que se verifican las desigualdades. Vamos a buscar numéricamente este punto para varios valores de k . Con este objetivo hemos creado un programa con el software *Mathematica* que calcula numéricamente el módulo de μ tomando un mallado de puntos en el disco y devuelve el máximo entre todos los valores de μ :

4.4 Nuevo ejemplo: solución de la ecuación dKP dependiente del tiempo

```

A[z_, zc_, a_, b_, c_] = 1 - 4 a z zc - 2 b zc;
B[z_, zc_, a_, b_, c_] = 1 - 4 zc (4 a c zc + 2 a z - b^2 zc + b);

mu[z_, zc_, a_, b_, c_] = (4 a z^2 + 4 b z + 4 c) / (
A[z, zc, a, b, c] + B[z, zc, a, b, c]^(1/2));

normaMu [a_, b_, c_, n_] :=
Module[{r, theta, mod, j, m, puntos, valores},
valores = {};
j = 0;
While[j < n,
j = j + 1;
r = j/n; m = 0;
While[m < n,
m = m + 1;
theta = (2 Pi m)/n;
mod = Abs[mu[r Exp[I theta], r Exp[-I theta], a, b, c]];
valores = Join[valores, {mod}]
]
];
Max[valores]
]

```

Haciendo uso de la función `normaMu` obtenemos los siguientes resultados numéricos:

- Fijamos $k = 0.7$ y el punto $(a_0, b_0, c_0) = (-0.5, 0.5, 0.1)$. Calculamos su máximo en el disco y obtenemos aproximadamente 0.61309 que es evidentemente menor que k . Nos queda comprobar que los puntos de ramificación estén en el interior del círculo (4.53), obtenemos que $|z_1| = 0.6$ y $|z_2| = 0.6$.
- Fijamos $k = 0.5$ y el punto $(a_0, b_0, c_0) = (-0.01, 0.1, 0.03)$. Ahora, comprobamos que el máximo en el disco sea menor que el k fijado usando `normaMu` obtenemos aproximadamente que el máximo en el círculo es 0.283797. Comprobamos numéricamente que los puntos de ramificación estén en el interior del círculo (4.53), obtenemos que $|z_1| \approx 0.20367$ y $|z_2| \approx 0.20367$.
- Fijamos $k = 0.2$ y el punto $(a_0, b_0, c_0) = (-0.01, 0.04, 0.03)$. Ahora, calculamos su máximo en el disco y obtenemos 0.124832 que es evidentemente menor que el k fijado. Nos queda comprobar que los puntos de ramificación estén en el interior del círculo (4.53), obtenemos que $|z_1| \approx 0.101835$ y $|z_2| \approx 0.101835$.

4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CUASICONFORMES A LA RESOLUCIÓN DE EDP

- Fijamos $k = 0.1$ y el punto $(a_0, b_0, c_0) = (-0.01, 0.02, 0.03)$. Obtenemos que el máximo aproximadamente es 0.0901088 que es evidentemente menor que k . Por otro lado, tenemos que $|z_1| \approx 0.07698$ y $|z_2| \approx 0.07698$.
- Fijamos $k = 0.01$ y el punto $(a_0, b_0, c_0) = (-0.001, 0.001, 0.001)$. Ahora, calculamos su máximo en el disco y obtenemos 0.00445435 que es evidentemente menor que el k fijado en este caso. Nos queda comprobar que los puntos de ramificación estén en el interior del círculo (4.53), obtenemos que $|z_1| \approx 0.00445435$ y $|z_2| \approx 0.00445435$.

Conclusiones

En esta introducción a las aplicaciones cuasiconformes hemos comenzado por la definición analítica. En ella tenemos que las aplicaciones cuasiconformes son homeomorfismos que conservan la orientación y que pertenecen a la clase de Sóbolev $W_{loc}^{1,2}$. Aunque hemos trabajado únicamente con ejemplos de aplicaciones cuasiconformes cuyas derivadas parciales existían en el sentido usual. El hecho de que solo exijamos que existan las derivadas en el sentido de distribuciones (débiles) nos permite generalizar a muchas otras aplicaciones.

Cuando se ha demostrado que los homeomorfismos soluciones de las ecuaciones de Beltrami son efectivamente aplicaciones cuasiconformes, no solo se ha encontrado una relación entre la teoría de EDP y la teoría de las aplicaciones cuasiconformes; sino que además, se ha encontrado una definición equivalente a la definición analítica. Haciendo uso de esta definición se ha conseguido probar que los ejemplos propuestos eran efectivamente aplicaciones cuasiconformes.

Por otro lado, hemos visto que las aplicaciones conformes son un caso particular de aplicaciones cuasiconformes, en concreto son aplicaciones 1–cuasiconformes. De nuevo, gracias a la ecuación de Beltrami, en concreto al coeficiente de dilatación se ha demostrado que la composición de dos aplicaciones cuasiconformes cuyos coeficientes de dilatación coinciden en un abierto definen en dicho abierto una aplicación conforme.

Al inicio de este trabajo vimos como el estudio o el interés por buscar un concepto lo más similar posible al de aplicación conforme vino dado por el propósito de transformar un cuadrado en un rectángulo sin imponer que los vértices fueran a los vértices. En este trabajo, se ha visto un ejemplo similar a este, en particular, con las coronas circulares. Las aplicaciones conformes solo permiten transformar una corona circular en otra cuya relación entre el eje mayor y el eje menor coincida. Y de nuevo, el concepto cercano al

5. CONCLUSIONES

de transformación conforme, el de aplicación cuasiconforme, nos permite transformar una corona circular en otra corona circular sin que tenga que mantener la proporcionalidad entre sus radios. Pese a que se haya visto para coronas cuya circunferencia exterior era la circunferencia unidad este resultado se puede extender para otro tipo de coronas circulares a través de dilataciones.

Para concluir el proyecto, se ha elaborado un método para resolver ecuaciones en derivadas parciales haciendo uso de teoría de aplicaciones cuasiconformes, basado principalmente en la ecuación de Beltrami. El método se ha elaborado y se ha aplicado a un tipo de ecuación, dKP, *dispersionless Kadomtsev-Pervashvili*, llegando a determinar dos soluciones en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 .

El método que hemos expuesto en el capítulo 4 de esta memoria puede extenderse [13] a una jerarquía más amplia de ecuaciones sin dispersión, la jerarquía de Whitham. Para ello la hipótesis de que S sea una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$ se sustituye por imponer que S sea meromorfa en $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$ con un conjunto finito de polos

$$\{z_1, \dots, z_s\}.$$

Entonces la hipótesis (4.4) para el desarrollo de Laurent en un entorno de ∞ debe complementarse imponiendo que los desarrollos de Laurent de S en ciertos discos $D(z_i, r_i) \setminus \{z_i\}$, $i = 1, \dots, s$ sean de la forma

$$S(z) = \sum_{j=1}^{N_i} \frac{t_{i,j}}{(z - z_i)^j} + \sum_{k=0}^{\infty} S_{i,k} (z - z_i)^k, \quad i = 1, \dots, s,$$

donde $\{t_{i,j}, j = 1, \dots, N_i, i = 1, \dots, s\}$ serán nuevas variables para las ecuaciones. En particular, si $m = 1$ la jerarquía de EDP que se obtiene es la jerarquía de Toda sin dispersión (dToda), jerarquía en la que también pueden encontrarse modelos relevantes en dinámica de fluidos.

Bibliografía

- [1] Lipman Bers. On a theorem of mori and the definition of quasiconformality. *Transactions of the American Mathematical Society*, 84(1):78–84, 1957. 2
- [2] S Ponnusamy and Antti Rasila. Planar harmonic and quasi-conformal mappings. *RMS Mathematics Newsletter*, 17(3):85–101, 2007. 2, 19, 38, 41
- [3] Nathan Mercer and Rich Stankewitz. Introduction to quasiconformal mappings in the plane with an application to quasiconformal surgery. 8, 19
- [4] Manuel González Burgos. Espacios de Sobolev. *Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla*. 13
- [5] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010. 13
- [6] Olli Lehto and Kaarlo Ilmari Virtanen. *Quasiconformal mappings in the plane*, volume 126. Citeseer, 1973. 15
- [7] Bodil Branner, Núria Fagella, and Xavier Buff. *Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics*. Number 141. Cambridge University Press, 2014. 19
- [8] Tadeusz Iwaniec and Gaven Martin. The Beltrami equation. 2008. 19
- [9] Olli Lehto. *Univalent functions and Teichmüller spaces*, volume 109. Springer Science & Business Media, 2012. 19, 48
- [10] K Astala, T Iwaniec, GJ Martin, and J Onninen. Schottkys theorem on conformal mappings between annuli: A play of derivatives and integrals. *Contemporary Mathematics*, 455:35–39, 2008. 38
- [11] Lars Valerian Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*, volume 38. American Mathematical Soc., 2006. 48
- [12] Ilia Vekua. *Generalized analytic functions*. Elsevier, 2014. 48

BIBLIOGRAFÍA

- [13] Boris Konopelchenko and L Martínez Alonso. $\bar{\partial}$ -equations, integrable deformations of quasiconformal mappings and Whitham hierarchy. *Physics letters A*, 286(2-3):161–166, 2001. 48, 66
- [14] Boris Konopelchenko, L Martínez Alonso, and Elena Medina. Quasiconformal mappings and solutions of the dispersionless KP hierarchy. *Theoretical and mathematical physics*, 133(2):1529–1538, 2002. 58